

# Toets Stochastic Models (theorie)

Woensdag 18 mei 2016, 13.45 – 16.45 uur

Onderdeel van de volgende Bachelor (tweedejaars) modules:

Modelling and analysis of stochastic processes for MATH (201400434)

Modelling and analysis of stochastic processes for IEM (201400062)

Coordinator: W.R.W. Scheinhardt

Docenten: W.R.W. Scheinhardt, R.J. Boucherie, J.T. Timmer

- Dit tentamen bestaat uit vier opgaven
- Boeken, aantekeningen, etc. zijn NIET toegestaan
- Gewone rekenmachine is toegestaan, maar GEEN grafische rekenmachine
- Zet naam en studentnummer op ieder vel dat u inlevert
- Motiveer alle antwoorden

**Puntenverdeling: totaal 90 punten.**

**Cijfer = 1 + behaald aantal punten / 10**

## Opgave 1 (25 punten)

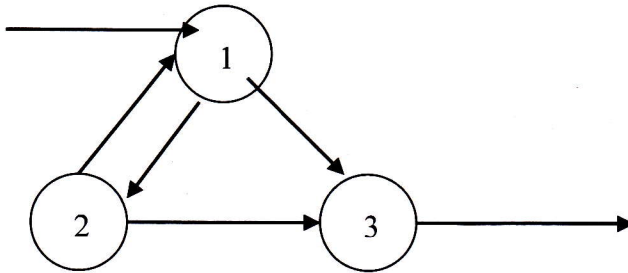
Een continubedrijf produceert goederen op een 3-tal identieke machines. Per machine is de productie 1000 stuks per dag. Elke machine is aan storingen onderhevig. Het verhelpen van een storing gebeurt door een monteur. De daarmee gemoeide reparatietijd kent een exponentiële verdeling met een gemiddelde van 1 dag. Na het verhelpen van een storing is een machine weer als nieuw.

De tijd tot het optreden van een storing vanaf het in gebruik nemen van een gerepareerde machine heeft een exponentiële kansverdeling met een gemiddelde van 4 dagen. Voor het onderhoud zijn 2 gelijkwaardige monteurs beschikbaar.

- [3 pt] Definieer een Markovketen met 4 toestanden die dit systeem beschrijft; waarom is sprake van een Markovketen?
- [3 pt] Stel dat op een bepaald moment twee machines in reparatie zijn. Wat is de kans dat de eerstvolgende verandering het optreden van een storing aan de derde machine is?
- [7 pt] Bereken de fracties van de tijd waarmee het systeem zich in elk van de toestanden bevindt.
- [3 pt] Wat is de bezettingsgraad van de onderhoudsafdeling?
- [3 pt] Wat is het verwachte aantal machines in storing?
- [3 pt] Wat is de gemiddelde dagproductie?
- [3 pt] Wat is de frequentie van optreden van storingen in het systeem als geheel?

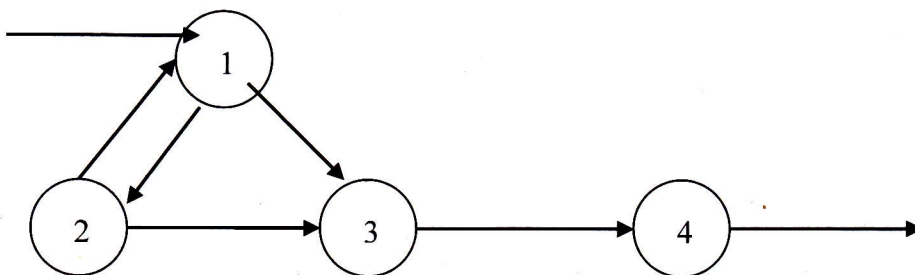
Opgave 2 (20 punten)

Beschouw het open netwerk uit onderstaande figuur. Het wachtrijsysteem bestaat uit 3 stations, 1, 2, en 3, ieder met een enkele bediende en onbeperkte wachtrij waarin klanten op volgorde van binnenkomst worden bediend. Het aankomstproces bij station 1 is een Poissonproces met intensiteit  $\gamma_1$  jobs per uur. Stations 1, 2 en 3 hebben exponentieel verdeelde bewerkingstijden, met gemiddeld aantal jobs dat verwerkt kan worden per uur respectievelijk 20, 12 en 18. De overgangskansen zijn als volgt:  $r_{12}=r_{13}=0.5$ ,  $r_{21}=0.25$ ,  $r_{23}=0.75$ .



- [4 pt] Formuleer de stroomvergelijkingen voor het netwerk en los deze op.
- [2 pt] Hoe luidt de stationariteitsvoorwaarde?
- [4 pt] Laat  $\gamma_1=14$  jobs per uur. Geef de kansverdelingen van het aantal jobs bij stations 1, 2, en 3 (de marginale verdelingen).
- [4 pt] Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job in het netwerk?

Beschouw nu hetzelfde netwerk, maar met een extra station 4 (zie onderstaande figuur). Station 4 heeft, net als stations 1, 2, en 3, een enkele bediende en onbeperkte wachtrij waarin klanten op volgorde van binnenkomst worden bediend. Station 4 heeft echter bewerkingstijden met algemene verdeling  $G$ , met gemiddeld aantal jobs dat verwerkt kan worden per uur gelijk aan  $1/\mu_4$ , en variantie  $s^2$ . Verder is  $r_{34}=1$ .



- [4 pt] Het aankomstproces bij station 4 is een Poissonproces met intensiteit  $\gamma_1$  jobs per uur. Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job bij station 4?
- [2 pt] Wat is de gemiddelde verblijftijd van een job in het gehele netwerk bestaande uit stations 1, 2, 3 en 4?

Zie volgend blad voor opgave 3 en 4.

3. (20 punten) Tina Trui verkoopt UT truien op drie festivals op het UT terrein, namelijk het Batavierenfeest, het Bevrijdingsfestival en het Green Vibrations Festival. Zij verkoopt 100 of 200 truien, met gelijke kans, per festival. Elke keer dat Tina een bestelling plaatst, betaalt zij 500 euro plus 5 euro per bestelde trui. Zij kan truien per honderdtal bestellen. De verkoopprijs van een trui is 8 euro. Voor truien die overblijven na een festival betaalt zij 2 euro per trui aan opslagkosten. Zij kan hooguit 200 truien opslaan na een festival. Na de drie festivals, brengt elke overgebleven trui 4 euro op.
- Bepaal een bestelstrategie die de verwachte winst voor Tina Trui gedurende de drie festivals maximaliseert.
- [5 pt] Formuleer dit probleem als een stochastisch dynamisch programmeringsprobleem. Benoem de fasen, toestanden, beslissingen en optimale-waarde functie.
  - [5 pt] Geef de recurrente betrekking voor de optimale-waarde functie.
  - [7 pt] Los het probleem op via dynamische programmering. Wat is de maximale verwachte winst voor Tina Trui?
  - [3 pt] Bepaal de optimale bestelstrategie door het opstellen van een *policy table*.
4. (25 punten) De eigenaar van een mijn moet wekelijks beslissen over de hoeveelheid springstof die hij op zaterdag wil inzetten voor de ontginning van zijn mijn. Hij kan kiezen uit twee opties: een lage hoeveelheid springstof (L) en een hoge hoeveelheid springstof (H). De wekelijkse opbrengst van de mijn deelt hij in drie categorieën: onder gemiddeld (OG), gemiddeld (G) en boven gemiddeld (BG). Hij gelooft dat de opbrengst stochastisch afhangt van zowel de opbrengst van de vorige week als de hoeveelheid gebruikte springstof in de vorige week. Dit wordt gemodelleerd door de volgende overgangskansen:

Opbrengst vorige week	Springstof L			Springstof H		
	Opbrengst deze week			Opbrengst deze week		
	BG	G	OG	BG	G	OG
BG	0.2	0.5	0.3	0.6	0.3	0.1
G	0	0.6	0.4	0.4	0.5	0.1
OG	0	0.3	0.7	0.2	0.7	0.1

- [3 pt] Wat is de kans dat de opbrengst *volgende* week OG is als de opbrengst *vorige* week G was, en er telkens een lage hoeveelheid springstof wordt gebruikt?
- Veronderstel dat de hoeveelheden springstof L en H respectievelijk 100.000 en 300.000 euro kosten. Neem aan dat de wekelijkse opbrengsten (exclusief springstofkosten) van BG, G en OG respectievelijk 1.200.000, 1.000.000 en 800.000 euro zijn. De disconteringsfactor is 0.95 per week. Het doel van de eigenaar is maximalisering van de verwachte contante waarde van de opbrengsten.
- [5 pt] Geef de optimaliteitsvergelijkingen voor dit probleem.
  - [7 pt] Voer twee iteraties uit van het waarde-iteratie algoritme, uitgaande van  $V_0(i) = 0$  voor elke toestand  $i$ .
  - [6 pt] Kies zelf een stationaire politiek en onderzoek met het strategie of politiek-iteratie (policy iteration) algoritme of de door u gekozen politiek optimaal is.
  - [4 pt] Formuleer een LP-model waarmee de optimale politiek bepaald kan worden. Beschrijf hoe uit de oplossing van dit LP-model de optimale politiek gevonden wordt.