

Kenmerk: EW107/DWMP/t08/dh

Tentamen Deterministische Modellen in de OR
Maandag 18 juni, 13.30 – 16.30 uur
vakcode 158075

Opmerking vooraf: Geef bij elke opgave een volledige en duidelijke uitwerking inclusief argumentatie! Gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan.

1. (6 punten)

Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\begin{array}{ll} \min & z = 3x_1 \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 \geq 6 \\ & 3x_1 + 2x_2 = 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad (P)$$

- (a) Los het bovenstaande probleem (P) op met de 2-fasenmethode.
- (b) Bepaal het duale probleem (D) van (P).
- (c) Kan uit het resultaat van (a) iets over de optimale oplossing van (D) afgeleid worden? Zo ja, wat? Zo nee, waarom niet?

2. (6 punten)

Gegeven is het volgende LP-probleem (P):

$$\begin{array}{ll} \max & z = -4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 1x_2 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Het bijbehorende optimale tableau ziet er als volgt uit:

| z | x_1 | x_2 | e_1 | s_2 | RHS |
|-----|-------|-------|-------|-------|------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0.2 | -3.6 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0.6 | 1.2 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | -0.2 | 0.6 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

- (a) Bepaal het bij (P) behorende duale LP-probleem (D).
- (b) Geef de optimale oplossing van (P) en (D) (waarden variabelen en doelfunctie).

(c) Stel er komt een 3de variabele x_3 bij met als kolom voor de voorwaarden $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en als doelfunctiecoëfficiënt $c_3 = -1$. Blijft de gegeven basis optimaal.

3. (5 punten)

Gephas gebruikt werkuren en materiaal om 3 produkten te produceren. Het resource gebruik en de verkoopprijzen van de produkten zijn

| Resource | Prod.1 | Prod.2 | Prod.3 |
|---------------------|--------|--------|--------|
| Werkuren | 3 | 4 | 6 |
| Materiaal | 2 | 2 | 5 |
| Verkoopprijs (Euro) | 6 | 8 | 13 |

Momenteel zijn 60 eenheden van het materiaal beschikbaar. Verder kunnen maximaal 90 werkuren ingezet worden, ieder voor 1 Euro. Om Gephas profijt te maximaliseren moet het volgende LP opgelost worden:

$$\begin{aligned}
 \max \quad z &= 6x_1 + 8x_2 + 13x_3 - L \\
 \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 - L \leq 0 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 60 \\
 & L \leq 90 \\
 & x_1, x_2, x_3, L \geq 0
 \end{aligned}$$

De output van LINDO voor dit LP is:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 6X1 + 8X2 + 13X3 - L \\
 \text{subject to} \quad & \\
 & 2) \quad 3X1 + 4X2 + 6X3 - L \leq 0 \\
 & 3) \quad 2X1 + 2X2 + 5X3 \leq 60 \\
 & 4) \quad L \leq 90
 \end{aligned}$$

LP optimum found at step 3

Objective function value

1) 97.500000

| Variable | Value | Reduced cost |
|----------|-----------|--------------|
| X1 | 0.000000 | 0.250000 |
| X2 | 11.250000 | 0.000000 |
| X3 | 7.500000 | 0.000000 |
| L | 90.000000 | 0.000000 |

| Row | Slack or surplus | Dual prices |
|-----|------------------|-------------|
| 2) | 0.000000 | 1.750000 |
| 3) | 0.000000 | 0.500000 |
| 4) | 0.000000 | 0.750000 |

EURONo. iterations = 3

Ranges in which the basis is unchanged:

| Variable | obj coefficient ranges | | |
|----------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | current coef. | Allowable increase | Allowable decrease |
| X1 | 6.000000 | 0.250000 | Infinity |
| X2 | 8.000000 | 0.666667 | 0.666667 |
| X3 | 13.000000 | 3.000000 | 1.000000 |
| L | -1.000000 | Infinity | 0.750000 |

| Row | Righthand side ranges | | |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| | current rhs. | Allowable increase | Allowable decrease |
| 2 | 0.000000 | 30.000000 | 18.000000 |
| 3 | 60.000000 | 15.000000 | 15.000000 |
| 4 | 90.000000 | 30.000000 | 18.000000 |

- (a) Hoeveel zou Gephas maximaal voor één eenheid extra materiaal moeten betalen?
- (b) Hoeveel zou produkt 1 tenminste moeten opbrengen om het voor Gephas aantrekkelijk te maken om produkt 1 te produceren?
- (c) Hoe ziet de nieuwe optimale oplossing eruit, als produkt 3 nu 15 Euro opbrengt.
- (d) Zouden 100 werkuren ter beschikking staan, hoe zou dan het profijt van Gephas zijn?

4. (5 punten)

Gegeven is een project met 6 activiteiten, waarvoor de volgende gegevens bekend zijn:

| Activiteit | Predecessors | Tijd |
|------------|--------------|------|
| A | — | 2 |
| B | A | 4 |
| C | B | 3 |
| D | B | 2 |
| E | C,D | 10 |
| F | B | 15 |

- (a) Geef het bijbehorende AOA netwerk.
- (b) Bepaal het kritieke pad van het netwerk en de totale float en free float voor iedere activiteit.

5. (4 punten)

Er zijn vier personen beschikbaar voor het uitvoeren van vier taken. De volgende tabel geeft voor elke persoon aan hoeveel tijd hij/zij kwijt is voor het uitvoeren van de betreffende taak.

| | | Taak | | | |
|---------|---|------|----|----|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Persoon | 1 | 22 | 18 | 30 | 19 |
| | 2 | 18 | 40 | 27 | 15 |
| | 3 | 16 | 17 | 43 | 23 |
| | 4 | 26 | 20 | 31 | 20 |

Elke taak moet door een persoon worden uitgevoerd en iedere persoon mag ten hoogste een taak krijgen toegewezen. Het doel is om de totale tijd voor het uitvoeren van de taken te minimaliseren. Los dit probleem op met een uit het college bekende methode.

6. (5 punten)

Een bedrijf bouwt een fabriek waar twee produkten P1 en P2 geproduceerd worden met in totaal een capaciteit van 10.000 produkten. Voor de opslag van goederen bestaan twee mogelijke oplossingen:

Hal 1 kost 120.000 € en hal 2 kost 280.000 €. Er moet precies een van de twee hallen gebouwd worden. Kiest de fabriek voor hal 1, moeten tenminste 3 keer zoveel produkten van P1 dan van P2 gemaakt worden. Het bedrijf verwacht per produkt P1 een winst van 6000 € en per produkt van P2 een winst van 8000 €. Het doel is maximale winst te maken. Formuleer dit probleem als een ILP. Geef een duidelijke definitie van de variabelen en een duidelijke verklaring van alle voorwaarden en de doelfunctie.

7. (5 punten)

Een meubelbedrijf moet in 3 maanden de volgende aantallen bureau's afleveren: maand 1: 200; maand 2: 300; maand 3: 300. Voor ieder geproduceerd bureau in maand 1 en 2 zijn de variabele produktiekosten 100 EURO en voor ieder bureau geproduceerd in maand 3 is dit 120 EURO. De opslagkosten zijn 15 EURO voor ieder bureau dat aan het einde van de maand op voorraad ligt. De opstartkosten voor de produktie binnen een maand zijn 2500 EURO. Bureau's die in een bepaalde maand gemaakt worden kunnen die maand ook al geleverd worden. Wij gaan er vanuit dat de produktie per maand een veelvoud van 100 is en dat er geen beginvoorraad is.

Het doel is de gevraagde bureau's zo goedkoop mogelijk te leveren.

Los dit probleem op met dynamische programmeren. Definieer hiertoe de fasen, toestanden, beslissingen, kostenfuncties, recurrente betrekking voor de kostenfunctie.

Normering:

1.(a): 3 2.(a): 2 3.(a): 1 4. : 5 5. : 4 6. : 5 7.: 5
(b): 2 (b): 2 (b): 1
(c): 1 (c): 2 (c): 1
 : (d): 2

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.

Hulpmiddel: Tableau behorende bij een basis B

| z | BV | NBV | RHS |
|-----|------|---------------------------|-----------------|
| 1 | 0 | $c_{BV}B^{-1}N - c_{NBV}$ | $c_{BV}B^{-1}b$ |
| 0 | I | $B^{-1}N$ | $B^{-1}b$ |