

Oefententamen B Discrete Wiskunde II (152162)

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd!

Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan!

1. Voor $a = r_0 \in \mathbb{Z}^+$ en $b = r_1 \in \mathbb{Z}^+$ volgen we de stappen van het algoritme van Euclides:

$$\begin{aligned} r_0 &= q_1 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= q_2 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ &\dots \\ r_{n-2} &= q_{n-1} r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ r_{n-1} &= q_n r_n. \end{aligned}$$

We noteren $c = r_n$, en gaan bewijzen dat $c = \gcd(a, b)$

- (a) Stel dat $d \in \mathbb{Z}^+$, met $d|a$ en $d|b$. Bewijs dat $d|c$.
(b) Bewijs dat $c|r_i$ voor alle $i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$.
(c) Geef de definitie van een grootste gemene deler, en concludeer uit onderdeel a) en b) dat $c = \gcd(a, b)$.
2. Bepaal alle getallen kleiner dan 250, met precies 10 delers.
3. Gegeven twee functies $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- (a) Geef de definitie van $f \in O(g)$.
(b) Bestaan er twee functies f, g met $|f(n)| < g(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $g \in O(f)$?
Motiveer.
4. (a) Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 16n + 8$$

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 12.$$

- (b) Bepaal een recurrente betrekking voor het aantal woorden a_n van lengte n in de letters 0, 1 en 2, waarbij het aantal enen even is.
5. Gegeven een volledige binaire boom ('complete binary tree') $T = (V, E)$ met waarbij het aantal punten $|V| = n$, en er i interne punten ('internal vertices') zijn. Verder is ℓ het aantal bladeren ('leaves') van T .
- (a) Laat zien dat $n = 2i + 1$.
(b) Laat zien dat $\ell = i + 1$.
(c) Construeer een optimale prefix code voor $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ met respectievelijke frequenties 6, 10, 3, 15, 20, 7, 5.

