UITWERKINGEN TENTAMEN DYNAMICA (140302) 29 januari 2010

Opgave 1: Elevatiehoek in een parabolische baan

(a) Bereken op elk tijdstip de verplaatsing in de x- en y-richting:

$$x(t) = v_{0,x}t = v_0 t\cos(\phi_0)$$

$$y(t) = v_{0,y}t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t\sin(\phi_0) - \frac{1}{2}gt^2$$

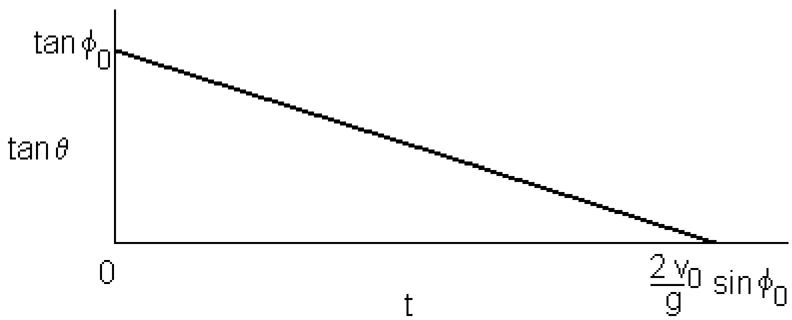
Dan geldt:

$$\tan(\theta(t)) = \frac{y(t)}{x(t)} = \tan(\phi_0) - \frac{g}{2v_0\cos(\phi_0)}t$$

Voor het eindpunt van de grafiek bereken je de tijd waarop het projectiel de grond raakt:

$$y(t_{y=0}) = v_0 t_{y=0}\sin(\phi_0) - \frac{1}{2}gt_{y=0}{}^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $t_{begin} = 0$ en $t_{eind} = \dfrac{2v_0}{g}\sin(\phi_0)$



(b) Op het hoogste punt: $t_{hp} = \dfrac{v_0}{g}\sin(\phi_0)$ $\Rightarrow$ $\tan(\theta(t_{hp})) = \dfrac{1}{2}\tan(\phi_0)$.

Opgave 2: Vallende staaf

Alleen verticale krachten zijn werkzaam; daardoor kan er geen horizontale versnelling bestaan. De horizontale beginsnelheid is nul, dus blijft de x-coordinaat van het massamiddelpunt op zijn plaats.

Uit de begin conditie volgt:

$$x_{CM} = \frac{1}{2} L \cos\theta$$

In de eindtoestand ligt de staaf plat, het midden ligt dan op x_{CM}. Het linker uiteinde ligt dan op:

$$x = x_{CM} - \frac{1}{2} L = \frac{1}{2} L(\cos\theta - 1)$$

Opgave 3: Schijf met een gat

(a) De massa die wordt weggehaald is: $M_{gat} = \dfrac{\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2}{\pi R^2} M = \dfrac{M}{16}$.

Het traagheidsmoment van het object is het traagheidsmoment van een volledige schijf ('vol') minus het traagheids moment van het verwijderde stuk ('gat').

$$I_{vol} = \frac{1}{2} MR^2$$

$$I_{gat} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{16}\right)\left(\frac{R}{4}\right)^2 + \left(\frac{M}{16}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{9}{512} MR^2$$

$$I = I_{vol} - I_{gat} = \frac{247}{512} MR^2$$

(b) Neem nu de as door het midden van het gat:

$$I_{vol} = \frac{1}{2} MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} MR^2$$

$$I_{gat} = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{16}\right)\left(\frac{R}{4}\right)^2 = \frac{1}{512} MR^2$$

$$I = I_{vol} - I_{gat} = \frac{383}{512} MR^2$$

Opgave 4: Trilling

(a) $x = \pm\frac{1}{3}L\theta$

De waarden van x zijn tegengesteld voor de uitwijkingen van de linker- en de rechterveer.

(b) $\tau = I\alpha$

$$\tau = \sum r \times F = -\theta Lmg - \frac{1}{3}L * 2\frac{1}{3}\theta L = -L(mg + \frac{2}{9}kL)$$

$$I = mL^2$$

Bewegingsvergelijking: $mL^2\ddot{\theta} + L(mg + \frac{2}{9}kL)\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + (\frac{g}{L} + \frac{2}{9}\frac{k}{m})\theta = 0$

Oplossing: $\theta = \theta_m \sin(\omega t + \gamma)$ met $\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2}{9}\frac{k}{m}}$

Opgave 5: Energie in een golfbeweging

(a) Begin met de definitie van kinetische energie en vul de massadichtheid van de snaar in:

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2}(\mu dx) v_y^2(x,t)$$

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu v_y^2(x,t) dx = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx$$

(b) Bereken de tijdsafgeleide, en vervolgens de kinetische energie van de golf:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \omega A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$u_k(x,t) = \frac{1}{2}\mu(\omega A)^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi) dx$$

(c) Bereken de lengte m.b.v. Pythagoras:

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\Delta x\right)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2} = \Delta x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]$$

(d) Potentiële energie is kracht maal uitrekking:

$$u_p(x,t) = F(\Delta L - \Delta x) = \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx$$

(e) Bereken de plaatsafgeleide, en vervolgens de potentiële energie van de golf:

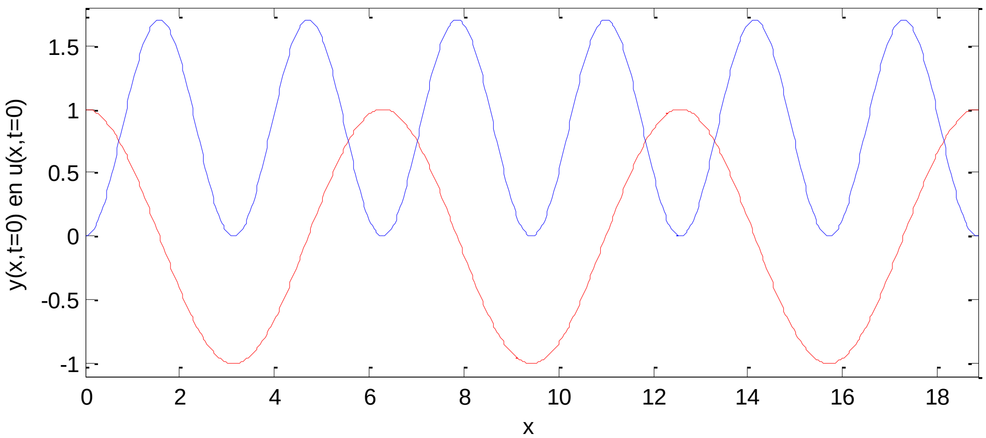
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -Ak\sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2}F(Ak)^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi) dx$$

(f) Met $F = v^2\mu$ en $\omega = vk$:

$$u_p(x,t) = \frac{1}{2}F(Ak)^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi) dx = \frac{1}{2}\mu(\omega A)^2 \sin^2(kx - \omega t + \phi) dx = u_k(x,t)$$

(g) De energieën zijn aangegeven met de blauwe lijn (kinetische energie = potentiële energie), en de uitwijking is aangegeven met de rode lijn.



Als de uitwijking nul is, is het snaarelementje maximaal uitgerekt en heeft het de maximale snelheid, dus zijn de beide energieëen maximaal.
Als de uitwijking maximaal is, is het snaarelementje niet uitgerekt en is zijn snelheid nul, dus zijn de beide energieën nul.

Opgave 6: Hellingproef

(a1) Voor het ruwe oppervlak:

$$T - mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma \qquad (1)$$

$$mg - T = ma \qquad (2)$$

(1) + (2): $$mg(1-\sin\theta - \mu\cos\theta) = 2ma$$

$$a = \frac{1}{2}g(1-\sin\theta-\mu\cos\theta) \qquad (3)$$

Voor het gladde oppervlak geldt dezelfde formule maar dan met *μ=0*.

(a2) De versnelling wordt negatief als de term tussen haken in (3) negatief is. Dit is het geval als:

$$\mu > \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

(b) In afwezigheid van wrijving geldt behoud van mechanische energie:

$$\Delta U + \Delta K = 0$$

$$\Delta U = mgs_1(sin\,\theta - 1)$$ en $$\Delta K = 2 * \frac{1}{2}mv^2$$

dus $v^2 = gs_1(1 - sin\,\theta)$

(c) Door wrijving wordt alle potentiële energie omgezet in inwendige energie:

$$\Delta U + \Delta E_{inw} = 0$$

$$\Delta U = mg(s_1 + s_2)(sin\,\theta - 1)$$

Opgave 7: Fietswiel

(a1) $\underline{L} = I\underline{\omega}$; $I = mR^2$

(a2) $\underline{L}$ wijst naar links

(b) $\underline{\tau} = \underline{r} \times \underline{\mathrm{F}}$.

$\underline{r}$ wijst naar links en bedraagt L

$\underline{F}$ wijst naar boven en bedraagt mg

$\underline{\tau}$ wijst het papier in, en bedraagt Lmg

(c) $\underline{\tau} = d\underline{L} / dt$. Doordat $d\underline{L} / dt$ loodrecht op $\underline{L}$ staat, gaat $\underline{L}$ draaien om de verticale as. De grootte van $\underline{L}$ blijft daarbij gelijk.

Dus de wiel-as gaat draaien om de verticale as. De hoeksnelheid van de rotatie <u>t.o.v. de wiel-as</u> blijft ω. (er zijn dus 2 rotaties).

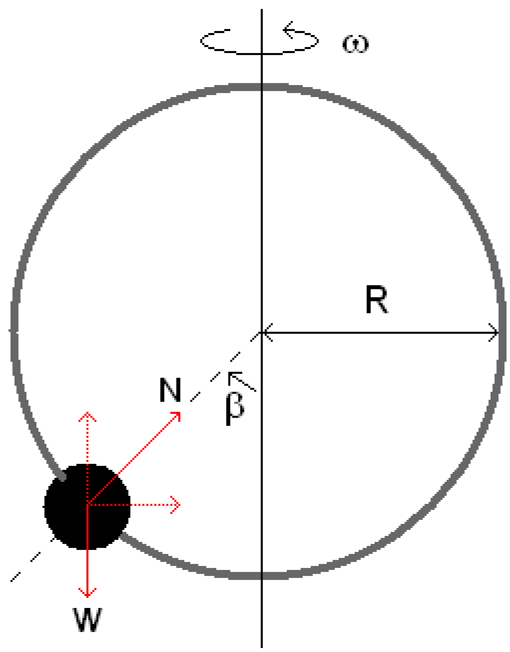
(d) $\dfrac{Lg}{R^2\omega}$ is de zgn. precessie-hoeksnelheid: ω_p .

Dit is de hoeksnelheid van het wiel tov de verticale as.

$$\tau = Lmg = \frac{d\underline{L}}{dt} = \omega_p . mR^2\omega \quad \Rightarrow \omega_p = \frac{Lg}{R\omega^2}$$

Opgave 8: Kraal om een ring

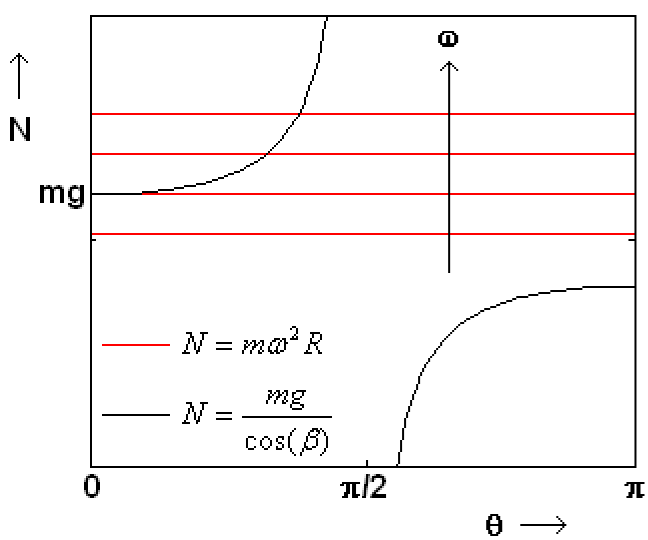
(a)



x-richting: $N\sin(\beta) = ma = m\omega^2 R\sin(\beta) \quad \Rightarrow \quad N = m\omega^2 R$

y-richting: $N\cos(\beta) - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{mg}{\cos(\beta)}$

Teken deze uitdrukkingen voor N als functie van de hoek β voor verschillende waarden van de hoeksnelheid ω.



(b) Uit de uitdrukkingen voor N volgt dat een stabiele rotatie alleen mogelijk is als $\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1$, dus als $\omega \geq \sqrt{\frac{g}{R}}$. Als ω kleiner wordt, voert de kraal een trilling uit rond $\beta = 0$.

(c) Aangezien $\cos(\beta) = \frac{g}{\omega^2 R}$, geldt $\cos(\beta) > 0$ en $\beta < \frac{\pi}{2}$. Als $\beta = \frac{\pi}{2}$ is er geen component van de normaalkracht in de verticale richting, en voor $\beta > \frac{\pi}{2}$ wijst de verticale component van de normaalkracht in dezelfde richting als de zwaartekracht. Er is dan dus geen krachtenevenwicht mogelijk.

(d) $\cos(\beta) = \frac{g}{\omega^2 R}$

R = 0.100 m
ω = 4.00 * 2 π s^{-1}
g = 9.81 m s^{-1}

$\Rightarrow$ β = 1.41 rad = 81.1 ^{o}