TENTAMEN DYNAMICA (191403021)

28 januari 2011, 08:45 – 12:15

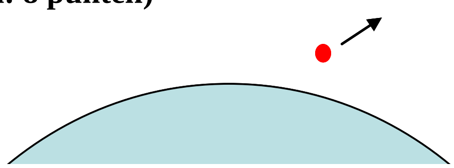
Verzoek: Begin de beantwoording van een nieuwe opgave op een nieuwe pagina.
Alleen leesbaar en verzorgd werk kan worden beoordeeld.

Opgave 1 (norm: 5 punten)

Een blok en een cilinder van hetzelfde materiaal worden gelijktijdig losgelaten op dezelfde helling. Bij aanvang van dit experiment hebben alle objecten dezelfde temperatuur. Het blok glijdt en de cilinder rolt. Bij een bepaalde hellingshoek blijken blok en cilinder precies even snel naar beneden te bewegen. Na aankomst onder aan de helling wordt van beide objecten de temperatuur gemeten.

Geef voor beide objecten aan wat er met de temperatuur is gebeurd: afgenomen, gelijk gebleven of toegenomen? Geef ook een korte uitleg hierbij.

Opgave 2 (norm: 8 punten)



Beschouw een planeet die geen atmosfeer heeft, maar wel water, in de vorm van ijs aan het oppervlak. Uit het ijs ontsnappen voortdurend moleculen naar een dampfase; echter de concentratie in deze damp is zeer laag (vandaar dat niet gesproken wordt van een atmosfeer). Dit betekent dat watermoleculen in de dampfase tijdens hun beweging geen botsingen ondergaan met andere moleculen. Dientengevolge zal een molecuul dat in de damp voldoende snelheid heeft, kunnen ontsnappen aan de zwaartekracht van de planeet. De planeet heeft een constante massadichtheid ρ en een straal R. De gravitatie kracht tussen twee massa's m_1 en m_2 op afstand r wordt gegeven door:

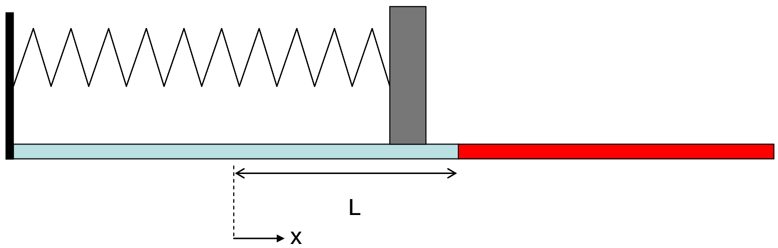
$F = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$ met G de universele gravitatieconstante.

a) Leid de uitdrukking voor de ontsnappingssnelheid af.

Veronderstel dat binnen de planeet de massa zich herverdeelt (bijv. doordat elementen met een hogere massadichtheid zich verplaatsen richting de kern). De bolsymmetrie blijft daarbij behouden, d.w.z. de locale dichtheid is alleen een functie van de afstand r tot het massamiddelpunt: $\rho(r)$. De straal van de planeet blijft, evenals de totale massa, constant.

b) Zal hierdoor de ontsnappingssnelheid veranderen? Geef korte motivatie bij uw antwoord

Opgave 3 (norm: 20 punten)



Een blok met massa $\boldsymbol{m}$ en verwaarloosbare afmetingen is via een *Hookse* veer met veer-constante $\boldsymbol{k}$ verbonden aan een muur. Aanvankelijk is de veer ongespannen en bevindt het blok zich op $\boldsymbol{x=0}$. De ondergrond is horizontaal, en bestaat uit twee stukken: i) een glad gedeelte dat zich naar links uitstrekt tot aan de muur, en naar rechts over een lengte $\boldsymbol{L}$, gemeten vanaf $\boldsymbol{x=0}$. ii) verder naar rechts, dus voor $\boldsymbol{x > L}$ is de ondergrond ruw en zijn de statische en dynamische wrijvingscoëfficiënten respectievelijk $\boldsymbol{\mu_s}$ en $\boldsymbol{\mu_k}$. De zwaarte-krachtsversnelling bedraagt $\boldsymbol{g}$.

Vanuit rust wordt het blok in beweging naar rechts gezet, zodat het bij $\boldsymbol{x=0}$ een begin-snelheid $\boldsymbol{v_i}$ krijgt. Bij een gekozen beginsnelheid $\boldsymbol{v_i = v_0}$ komt het blok precies tot aan de overgang tussen het gladde en het ruwe oppervlak.

a) Geef de uitdrukking voor $\mathbf{v_0}$ *in termen van gegeven parameters.*

b) Geef de uitdrukking voor de frequentie van de oscillatie die ontstaat.

Voor $\boldsymbol{v_i > v_0}$ gaat het blok ook bewegen over het ruwe oppervlak. De verplaatsing over het ruwe gedeelte is $\boldsymbol{x'=x-L}$. In eerste instantie beweegt het blok naar rechts.

c) Geef voor deze fase de bewegingsvergelijking, d.w.z. de uitwerking van $\underline{F}=m\underline{a}$ in termen van gegeven grootheden.

Bij $\boldsymbol{x' = L'}$ komt het blok tot stilstand.

*d) Geef de vergelijking waarmee **L'** gevonden wordt. De oplossing zelf wordt niet gevraagd*

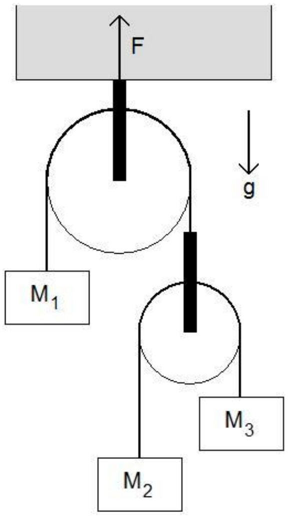
Afhankelijk van de getalswaarden van de gegeven parameters, kan het blok in omgekeerde richting gaan bewegen, of stil blijven staan.

e) Leg kort uit waarom beide scenario's mogelijk zijn.

Veronderstel dat het blok niet blijft staan, maar gaat oscilleren. Daarbij is $\boldsymbol{\mu_s = \mu_k}$.

*f) Maak een schets van de beweging, d.w.z. van **x(t)** voor een aantal oscillaties. Markeer daarbij de lijnen **x=0** en **x=L**. Geef ook aan hoe de oscillatie eruitziet voor* $\boldsymbol{t \to \infty}$.

Opgave 4 (norm: 15 punten)



Deze opstelling met drie massa's en twee ideale katrollen kan als een dubbele Atwood Machine worden beschouwd. Evenals de katrollen zijn ook de touwen zijn massaloos.

Het is de bedoeling om de opwaartse versnelling van massa M_1 te berekenen.

(a) Geef de bewegingsvergelijking voor elk van de drie blokken. Werk daarbij met scalaire grootheden, en druk het antwoord uit in M_1, M_2, M_3, a_1, a_2, a_3, F en g.

(b) De lengte van de touwen is constant. Geef de vergelijking die de verschillende versnellingen aan elkaar relateert.

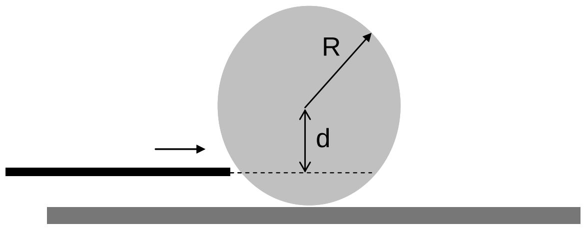
De opwaartse versnelling van M_1 is nu te berekenen door het probleem volledig op te lossen, maar dit kost veel rekenwerk. Door het gebruik van speciale gevallen kan ook bepaald worden welk van onderstaande antwoorden correct is.

(c) Beredeneer dat voor de speciale gevallen $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, en $M_3 = 0$, de versnelling a_1 respectievelijk $+g$, $-g$, en $-g$ is. Gebruik hierbij de spankrachten in de touwen.

(d) Schrijf voor elk speciaal geval bij (c) op, welke van de onderstaande antwoorden incorrect zijn. Wat is het correcte antwoord (er blijft er één over)?

1. $g \cdot \dfrac{2 \cdot M_2 M_3 - M_1 M_2}{2 \cdot M_2 M_3 + M_1 M_2}$
2. $-g \cdot \dfrac{2 \cdot M_2 M_3 - M_1 M_2}{2 \cdot M_2 M_3 + M_1 M_2}$
3. $g \cdot \dfrac{4 \cdot M_2 M_3 - M_1 M_2 - M_1 M_3}{4 \cdot M_2 M_3 + M_1 M_2 + M_1 M_3}$
4. $-g \cdot \dfrac{4 \cdot M_2 M_3 - M_1 M_2 - M_1 M_3}{4 \cdot M_2 M_3 + M_1 M_2 + M_1 M_3}$
5. $g \cdot \dfrac{M_1 - M_2 - M_3}{M_1 + M_2 + M_3}$
6. $-g \cdot \dfrac{M_1 - M_2 - M_3}{M_1 + M_2 + M_3}$

Opgave 5 (norm: 24 punten)



Een biljartbal met massa $\boldsymbol{m}$ en massatraagheidsmoment $\boldsymbol{2mR^2/5}$ (ten opzichte van het massamiddelpunt) ligt op een biljartlaken en wordt horizontaal aangestoten op een hoogte ($\boldsymbol{R}$-$\boldsymbol{d}$) (t.o.v. het laken). Het aanstoten duurt heel kort (tijd: Δt) en de gemiddelde kracht daarbij bedraagt $\boldsymbol{F}$. De wrijvingscoëfficiënt tussen bal en laken bedraagt $\boldsymbol{\mu}$. Als we $\boldsymbol{F\Delta t = J}$ noemen, dan blijkt de beweging van de bal direct na de stoot in goede benadering gegeven te worden door:

$$v_0 = \frac{J}{m} \qquad (1) \qquad\qquad \omega_0 = \frac{5Jd}{2mR^2} \qquad (2)$$

met $\boldsymbol{v_0}$ de grootte van de translatiesnelheid en $\boldsymbol{\omega_0}$ de grootte van de hoeksnelheid.

*a1) Welke andere krachten (behalve **F**) worden er uitgeoefend op de bal?*

a2) Waarom spelen deze krachten kennelijk geen rol van betekenis? (Leg kort uit).

b) Laat zien hoe de uitdrukkingen (1) en (2) gevonden worden.

Na de stoot gaat de bal verder bewegen, met begincondities gegeven door (1) en (2).

c) Leg uit hoe de bal beweegt. Wat gebeurt er met translatie en rotatie-snelheid?

*d) Geef de uitdrukkingen voor **v(t)** en **ω(t)** in termen van gegeven grootheden.*

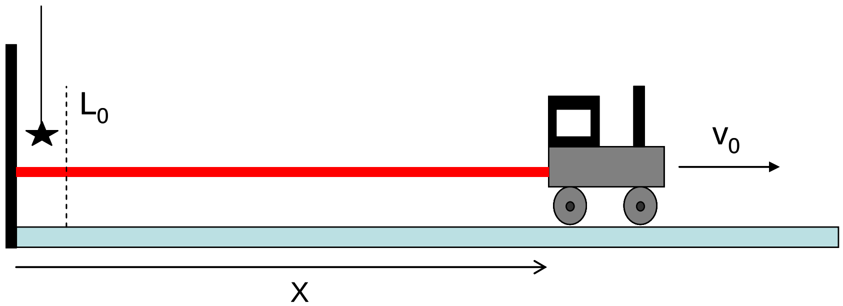
Vanaf een bepaald tijdstip $\boldsymbol{t^*}$ (gerekend vanaf de stoot) veranderen $\boldsymbol{v}$ en $\boldsymbol{\omega}$ niet meer.

*e) Vind de uitdrukking voor **t*.***

Op tijdstip $\boldsymbol{t^*}$ blijkt de snelheid van de bal gegeven te worden door: $v = \frac{5J}{7m}(1 - \frac{d}{R})$

f) Kan de bal eerst vooruit en later achteruit gaan bewegen? (Licht kort toe).

Opgave 6 (norm: 8 punten)



Een elastiek met veerconstante $\boldsymbol{k}$ en massa $\boldsymbol{m}$ is opgespannen tussen een vaste wand en een speelgoed locomotief. De rails staan loodrecht op het vlak van de wand. Bij de wand op $\boldsymbol{x=0}$ staat een experimentator met een toverstokje. Als hij daarmee het elastiek aantikt terwijl dit onder spanning staat, gaat er een golf lopen (in de richting van de locomotief). Aanvankelijk (op $\boldsymbol{t = 0}$) is het elastiek vrijwel ongespannen bij lengte $\boldsymbol{L \approx L_0}$. Voor $\boldsymbol{t > 0}$ beweegt de locomotief met een constante snelheid $\mathbf{v}_0$ zodat $\boldsymbol{L}$ toeneemt. De waarden van $\boldsymbol{L}$ die daarbij worden bereikt zijn >> $\boldsymbol{L_0}$ maar de spankracht neemt nog steeds lineair toe zodat $\boldsymbol{F \approx kL}$.
De snelheid van de golf die door de experimentator wordt opgewekt wordt, zal nu afhangen van de verstreken tijd $\boldsymbol{t}$ nadat de locomotief was begonnen met bewegen.

a) Geef de uitdrukking voor de golfsnelheid in termen van gegeven grootheden.

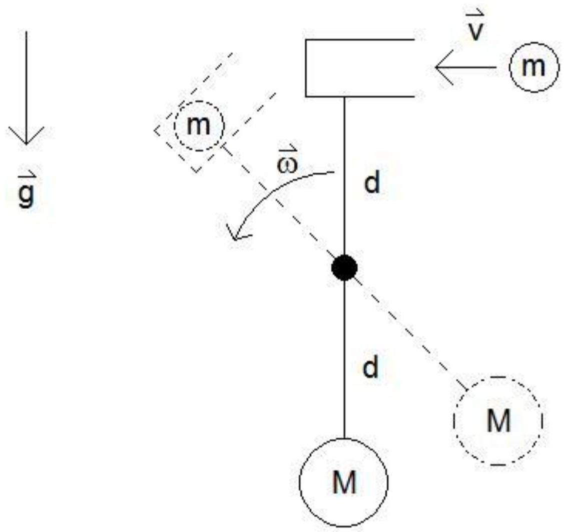
Bij een zekere tijd $\boldsymbol{t = \tau}$ zal de momentane snelheid van de opgewekte golf precies gelijk zijn aan de snelheid van de locomotief.

b) Geef de uitdrukking voor $\boldsymbol{\tau}$ *in termen van gegeven grootheden.*

Als de locomotief blijft doorrijden en het elastiek heel blijft, dan zal uiteindelijk elke gecreëerde golf de locomotief bereiken. Als het elastiek wordt aangetikt op het moment dat diens lengte $\boldsymbol{L^*}$ is, dan bereikt de golf de locomotief bij $\boldsymbol{t = t^*}$.

c) Geef de uitdrukking waaruit $\boldsymbol{t^*}$*opgelost kan worden. Oplossing zelf wordt niet gevraagd*

Opgave 7 (norm: 20 punten)



Een pendulum bestaat uit een bal met massa ***M*** die is bevestigd aan het eind van een massaloze starre staaf met lengte **2*d*** welke pivoteert in zijn centrum ("draaipunt"). Aan de andere kant van de staaf bevindt zich een massaloos opvangbakje, de zogenoemde "catch". Een tweede bal met massa ***m*** **<** ***M*** wordt in het bakje gegooid met een horizontale snelheid ***v***, en blijft (permanent) in het bakje vastzitten. Beschouw de ballen als puntmassa's.

(a) Wat is de initiële hoeksnelheid van de pendulum nadat de bal is opgevangen?

(b) Hoeveel mechanische energie raakt verloren wanneer de bal komt vast te zitten in het bakje?

(c) Wat is de minimum snelheid waarmee de bal moet worden gegooid om de pendulum volledig rond te laten draaien?

De bal wordt nu gegooid met een snelheid ***v*** die groter is dan deze minimumsnelheid.

(d) Werkt er tijdens de draaiing een kracht op het draaipunt van de staaf?
Leg je antwoord uit.