Uitwerkingen Dynamica tentamen 28 januari 2011 *versie 28-01-2011*

Opgave 1

De verandering van de potentiële (gravitatie) energie is even groot voor beide objecten. De verkregen translatie kinetische energie is ook even groot voor beide. Echter bij de cilinder is er ook energie gaan zitten in de rotatie. De (toename van de) totale kinetische energie van de cilinder is precies gelijk aan het verlies aan potentiële energie. Er is geen energie gaan zitten in wrijvingsverliezen, wat bij rollen treden die niet op. Bij het glijdende blok wel. Daarom is de cilinder temperatuur onveranderd en heeft het blok een hogere temperatuur gekregen.

Opgave 2

a)

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}$$

$$\left(F = \frac{-mMG}{r^2},\ \mathrm{U} = -\int_{\infty}^{r} F dr^{\nabla} = -\frac{mMG}{r} \right)$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{mv}_o^2 - \frac{\mathrm{mMG}}{\mathrm{R}} = 0 - 0 \text{ (snelheid nul, deeltje oneindig ver weg)}$$

$$v_o^2 = \frac{2MG}{R}, M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \Leftrightarrow v_o^2 = \frac{8}{3}\pi R^2 \rho G \Leftrightarrow v_{escape} = R\sqrt{\frac{8\pi}{3}\rho G}$$

b) het molecuul bevindt zich buiten de planeet. Volgens het schillentheorema werkt alle massa effectief nog steeds vanuit massamiddelpunt van de planeet. $\mathrm{v}_{\mathrm{escape}}$ verandert dus niet.

Opgave 3

a)

$$U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = const = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}kL^2 \Leftrightarrow v_o = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) $\mathrm{F} = \mathrm{ma} \Leftrightarrow -\mathrm{kx} = \mathrm{m}\ddot{\mathrm{x}} \Leftrightarrow \ddot{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\mathrm{x} = 0.$ opl: $\mathrm{x} = \mathrm{x_m} \sin(\omega \mathrm{t} + \gamma)$ met $\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$

c) $\mathrm{F} = \mathrm{ma} \Leftrightarrow \mathrm{ma} = -\mathrm{kx} - \mu_{\mathrm{k}}\mathrm{mg}$

d) energie vergelijking: $\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}k\left(L + L^{\nabla}\right)^2 + \mu_k mgL^{\nabla}$

(de laatste term is ‘verloren gegaan’ aan de wrijving)

e) $F = ma \Leftrightarrow ma = -kx + F_{\omega r}$

$F_{\omega r}$ is een statische wrijvingskracht, wijzend naar rechts (tegen de veerkracht in), met grootte $\leq \mu_s mg$

f) $\mu_s mg < k\left(L + L^{\nabla}\right)$: blok keert om, $F^{s}_{\omega r}$ te klein

$\mu_s mg > k\left(L + L^{\nabla}\right)$: blok blijft staan

g) x vertrekt vanaf x=0, neemt toe en overschrijdt L, oscilleert dan een aantal keer tussen minimale waardes < -L en maxima > +L, waarbij de overschrijding steeds kleiner wordt ivm wrijvingsverliezen. Uiteindelijk blijft de massa oscileren tussen –L en +L want op het gladde oppervlak gaat geen energie verloren.

Opgave 4

(a) Uit de krachtenbalansen over de massaloze katrollen en constante spanning in een touw, volgt dat de spanning in het touw tussen M_1 en de tweede katrol is F/2, en de spanning in het andere touw is F/4.

$$\frac{F}{2} - M_1 g = M_1 a_1$$
$$\frac{F}{4} - M_2 g = M_2 a_2$$
$$\frac{F}{4} - M_3 g = M_3 a_3$$

(b) De lengte van het touw is constant: $2L_1 + L_2 + L_3 = c$ geeft $2a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(Let op: $a_2 = -a_3$ over de tweede katrol is niet geldig, want de katrol versnelt zelf ook.)

(c)

i) $M_2 = 0$.
Blok M3 heeft een vrije val, waardoor de spanning in het bovenste koord wegvalt.
Resultaat: $a_1 = -g$.

ii) $M_3 = 0$.
Blok M_2 heeft een vrije val, waardoor de spanning in het bovenste koord wegvalt.
Resultaat: $a_1 = -g$.

iii) $M_1 = 0$.
De rechter pulley heeft een vrije val.
Resultaat: $a_1 = +g$.

(d)

i) 1-2-4-5-6 vallen af.

ii) 2-6 vallen af.

iii) 2-4-5 vallen af.

Het goede antwoord is 3.

Opgave 5

a1) wrijvingskracht (horizontaal) << F.
+ zwaartekracht mg gecompenseerd door normaalkracht N.

a2) verticale krachten spelen geen rol, massacentrum van biljartbal op constante hoogte.

b) $J = F\Delta t = \Delta p = m\Delta v = mv_o$ (translatie)

rotatie: $\underline{d} x \underline{J} = I(\underline{\alpha}\Delta t) \Leftrightarrow dJ = \frac{2}{5} mR^2\omega_o$

c) de bal beweegt naar rechts en draait daarbij tegen de klok in, dit betekent dat er slip optreedt. De wrijvingskracht werkt naar links. Hierdoor neemt snelheid v af, en de waarde van ω ook (dwz wordt minder negatief). Het krachtmoment van de wrijvingskracht staat met de klok mee/wijst het papier in.

d) $F_{wr} = -\mu mg \Rightarrow \underline{F} = m\underline{a} : a = -\mu g$

$v = v_o - \mu gt$

$$\Rightarrow \underline{\tau} = I\underline{\alpha} : \alpha = \frac{\mu mgR}{\frac{2}{5} mR^2} = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} = \omega = -\omega_o + \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R} t$$

(arm van de wrijvingskracht = R) (- teken ivm rotatierichting)

e) slipfase houdt op als $v = \omega R$ (zuiver rollen)

$v_o - \mu gt^* = -\omega_o R + \frac{5}{2}\mu gt^* \Leftrightarrow v_o + \omega_o R = \frac{7}{2}\mu gt^* \Leftrightarrow t^* = \frac{2}{7}\left(\frac{v_o + \omega_o R}{\mu g}\right)$

(check: $v_o - \mu gt^* = \frac{5}{7} v_o - \frac{2}{7}\omega_o R$

$-\omega_o R + \frac{5}{2}\mu gt^* = -\frac{2}{7}\omega_o R + \frac{5}{7} v_o \lambda$)

$$v = \frac{5}{7}\frac{J}{m} - \frac{2}{7}\frac{5Jd}{2mR^2}.R = \frac{5}{7}\frac{J}{M}\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

f) het maximale backspin effect treedt op bij d=R. Daar wordt de eindsnelheid $(v = \omega R)$ nul. Voor d<R wordt de eindsnelheid altijd positief: blijft dus naar rechts wijzen.

Opgave 6

a) Gebruik de uitdrukking voor de golfsnelheid in een gespannen snaar:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad T = kL, \quad \mu = \frac{m}{L} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{kL}{m/L}} = L\sqrt{\frac{k}{m}} \quad = \quad \sqrt{\frac{k}{m}}v_0 t$$

b) $v=v_0$ als $\sqrt{\frac{k}{m}}v_0\tau = v_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{k}}$

c)

Locomotief beweegt met constante snelheid: $x=v_0\, t$

Golf ondergaat eenparig versnelde beweging bij $x=0$, met beginsnelheid: $\sqrt{\frac{k}{m}}L^*$

en versnelling: $\sqrt{\frac{k}{m}}v_0$.

Noem de tijd verstreken na het aantikken Δt:

$$x = L^* + v_0\Delta t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}v_0\Delta t^2 + \sqrt{\frac{k}{m}}L^*\Delta t \quad (1)$$

Het tijdstip waarop $L=L^*$ is: $L^* = v_0 t_{ini}$

$$t^* = t_{ini} + \Delta t \quad (2)$$

Dit invullen levert het gevraagde verband (de twee vergelijkingen geven is ook voldoende).

Opgave 7

(a) Omdat tijdens de collisie geen externe koppels werken op het draaipunt, is er behoud van impulsmoment t.o.v. het draaipunt.

Vóór de collisie geldt: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow l = dmv$
Ná de collisie geldt: $\vec{L} = I\vec{\omega} \Rightarrow L = [m + M]d^2\omega$
Dus: $\omega = \frac{m}{m+M}\frac{v}{d}$

(b) Vóór de collisie: totale mechanische energie is kinetische energie van de bal:

$$K_{voor} = \frac{1}{2} m v^2$$

Ná de collisie: totale mechanische energie is rotatie energie:

$$K_{na} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M} v^2$$

$$\Delta E = K_{na} - K_{voor} = \frac{1}{2}\left[\frac{m^2}{m+M} - m\right] v^2 = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M} v^2$$

(c) Er zijn alleen conservatieve krachten, dus energiebehoud. Aannemende dat de potentiële energie nul is ter hoogte van het draaipunt…

Net ná de collisie:
$$h_{cm,1} = \frac{md - Md}{m+M} = \frac{m-M}{m+M} d$$
$$U_1 = [m+M] g h_{cm,1} = [m-M] gd$$

Om de pendulum nét volledig rond te laten draaien, wordt de rotatiesnelheid nul wanneer massa M boven is.

$$h_{cm,2} = \frac{-md + Md}{m+M} = -\frac{m-M}{m+M} d$$
$$U_2 = [m+M] g h_{cm,2} = -[m-M] gd$$

$$U_1 + K_{na} = U_2$$

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M} v^2 = -2[m-M] gd \qquad \Rightarrow \qquad v = 2\sqrt{\left[\left(\frac{M}{m}\right)^2 - 1\right] gd}$$