

Bij dit tentamen mag een grafische rekenmachine gebruikt worden.

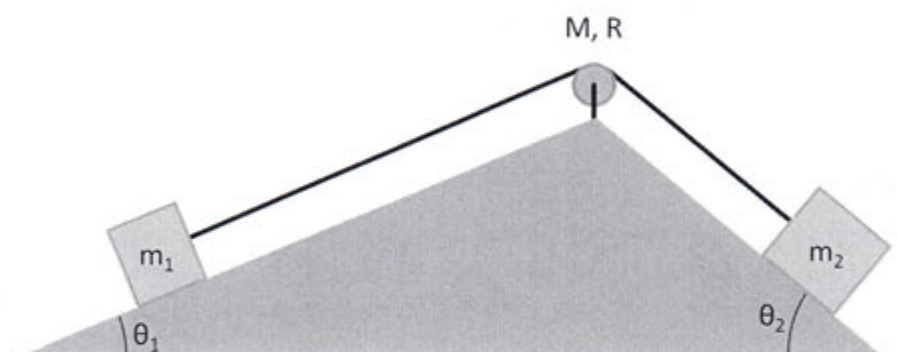
Het tentamen bestaat uit 5 opgaven waarbij totaal 100 punten behaald kunnen worden.

Verzoek: begin de beantwoording van een nieuwe opgave op een nieuwe pagina.

Alleen goed leesbaar en verzorgd werk kan beoordeeld worden.

### Opgave 1 (norm: 15 punten)

Twee blokken met massa's  $m_1$  en  $m_2$  zijn met elkaar verbonden via een massaloos touw dat over een katrol met massa  $M$  en straal  $R$  ligt. De katrol is een massieve schijf, en de wrijvingskracht tussen katrol en touw is zo groot dat, wanneer de blokken bewegen, het touw de katrol zonder slippen laat draaien. De kinetische wrijvingscoëfficiënt voor de blokken op de helling is  $\mu_k$ . Neem aan dat  $m_2$  veel groter is dan  $m_1$  (de blokken bewegen naar rechts), en dat de as van de katrol zonder wrijving draait. De zwaartekrachtsversnelling bedraagt  $g$ .



Geef de 4 vergelijkingen die nodig zijn voor het vinden van de translatie versnelling van de blokken, de hoekversnelling van de katrol, en de spankracht in elk deel van het koord (links en rechts van de katrol). Je hoeft de vergelijkingen niet op te lossen door ze in elkaar te substitueren. Laat wel zien dat je voldoende vergelijkingen hebt om alle onbekenden te vinden.

### Opgave 2 (norm: 15 punten)

Een massieve bowlingbal met massa  $M$ , straal  $R$  en massastraagheidsmoment  $2MR^2/5$  ligt op de vlakke wagon van een trein. De trein trekt op met een constante versnelling  $a_1$ . Als  $a_1$  voldoende klein is, zal de bal gaan rollen over de vloer van de trein zonder daarbij te slippen. De bal krijgt dan een translatie versnelling  $a_2$  (ten opzichte van de aarde), welke recht evenredig is met die van de trein:  $a_2 = \gamma a_1$ .

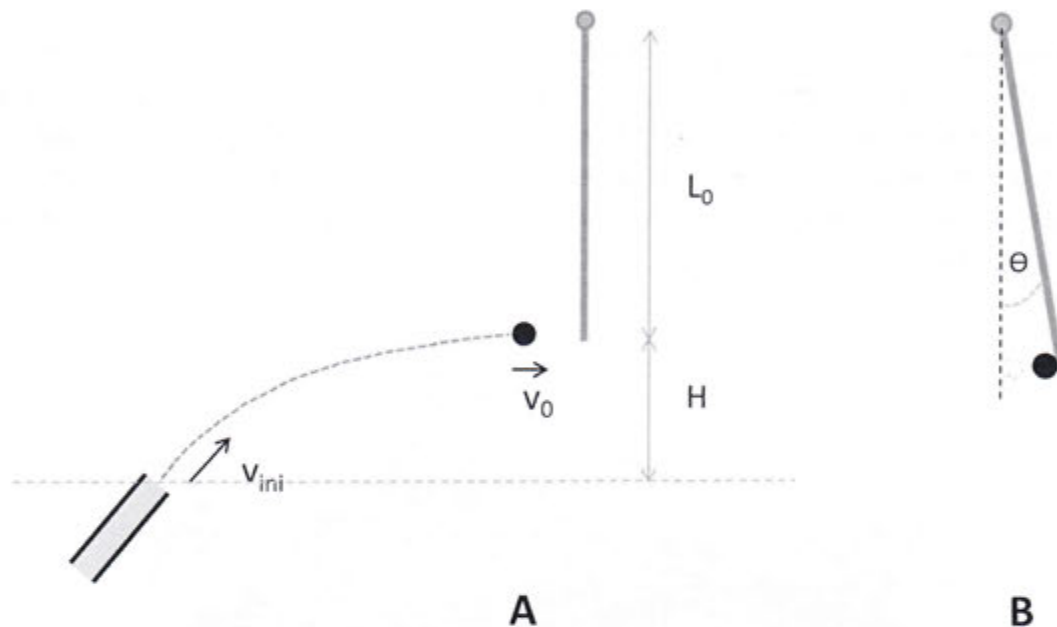
a) Vind de waarde van de constante  $\gamma$ .

De statische wrijvingscoëfficiënten van de trein met de rails  $\mu_1$  en van de bal met de vloer  $\mu_2$  blijken sterk te verschillen:  $\mu_1 \ll \mu_2$ . Een student beweert dat dit betekent, dat de trein nooit zo snel kan optrekken, dat de bal gaat slippen. De zwaartekrachtsversnelling is  $g$ .

b) Heeft deze student gelijk? Geef een korte toelichting.

### Opgave 3 (norm: 30 punten)

Een dunne massieve staaf met massa  $M$  en lengte  $L_0$  is opgehangen aan een scharnier. Aan het andere uiteinde is een markering aangebracht. De bedoeling is om dit punt te raken met een klein rubber balletje, eveneens met massa  $M$ . Het balletje wordt afgeschoten met een blaaspijp, waarvan het uiteinde zich op een verticale afstand  $H$  van de staaf bevindt (zie figuur A). Het balletje is zo plakkerig, dat het na de botsing aan de staaf blijft kleven. De zwaartekrachtsversnelling bedraagt  $g$ .



Een handige experimentator slaagt erin om het bolletje vlak voor de botsing een snelheid te geven welke precies horizontaal staat, en waarvan de grootte  $v_0$  bedraagt.

- Hoe groot moet de beginsnelheid  $v_{ini}$  van het balletje zijn?
- Hoe groot is het impulsmoment van het systeem (staaf plus balletje) voor de botsing, ten opzichte van het scharnierpunt?
- Hoe groot is het massatraagheidsmoment van de staaf met vastgeplakte bal t.o.v. scharnier punt?
- Laat zien dat het systeem direct na de botsing een hoeksnelheid van  $3v_0/4L_0$  heeft.
- Hoe groot is op dat moment de kinetische energie van het systeem? Hoe verhoudt deze zich tot de aanvankelijke kinetische energie van het balletje (kleiner, gelijk, groter)? Geef een korte toelichting
- Hoe groot is op dat moment (gebaseerd op de uitdrukking bij deel d) de impuls van het systeem (staaf plus balletje)? In welke richting wijst deze impuls?

Bij het scharnier blijkt er gedurende een korte tijd  $\Delta t$  een kracht uitgeoefend te worden.

- g) Hoe groot is de gemiddelde kracht die het scharnier gedurende deze  $\Delta t$  uitoefent op de staaf?  
In welke richting wijst deze kracht?

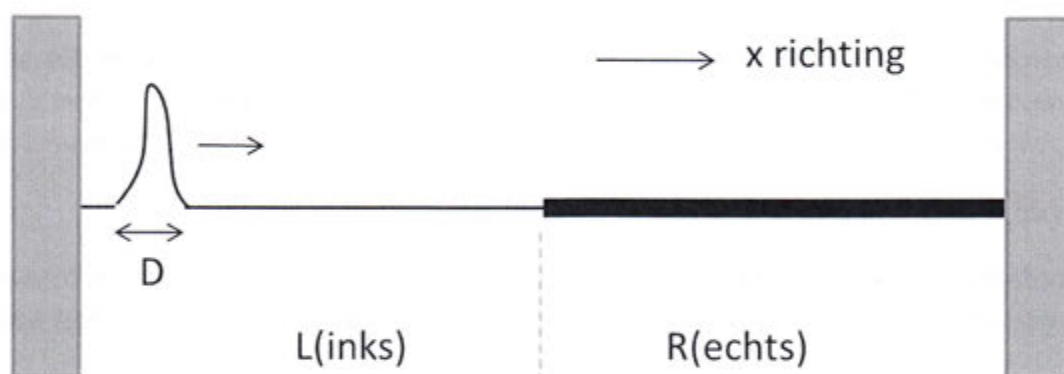
Na de botsing gaat de staaf met het balletje een slingerbeweging uitvoeren (zie figuur B).

- h) Stel de differentiaalvergelijking op welke de trilling beschrijft.

- i) Vind de uitdrukking voor de periode van de slingerbeweging, voor kleine uitwijkingen.

#### Opgave 4 (norm: 15 punten)

In een test-opstelling zijn twee stukken koord, allebei van lengte  $L$ , via één uiteinde aan elkaar verbonden zodat een 'samengesteld koord' met lengte  $2L$  ontstaat. Dit nieuwe koord wordt opgespannen tussen twee vaste wanden, en vervolgens verder aangespannen, totdat de spankracht  $T$  bedraagt. De massa's van de oorspronkelijke koorden zijn  $M$  voor de linkerhelft, en  $156M$  voor de rechterhelft. Aan de linkerkant wordt een verstoring opgelegd, zodat er een golf gaat lopen. In de getekende momentopname heeft de puls een breedte  $D$  (zie de figuur). Verondersteld mag worden dat  $D \ll L$ .



Zoals bekend geldt voor golven in een snaar dat  $T = \mu v^2$  met  $v$  de snelheid.

- a) Laat zien welke dimensie  $\mu$  moet hebben om in overeenstemming te zijn met deze vergelijking.

- b) Geef de uitdrukking voor de tijd  $\tau(M, L, T)$  die de puls nodig heeft om het knooppunt te bereiken.

Bij het knooppunt treedt transmissie en reflectie op.

- c) Geef de uitdrukking voor de pulsbreedte  $D'(D, M, L, T)$  van de doorgelaten golf in het rechterkoord.

- d) Welke vormen van mechanische energie worden door de golf getransporteerd?

Geef bij elke vorm aan, waar de energie in 'opgeslagen' is.

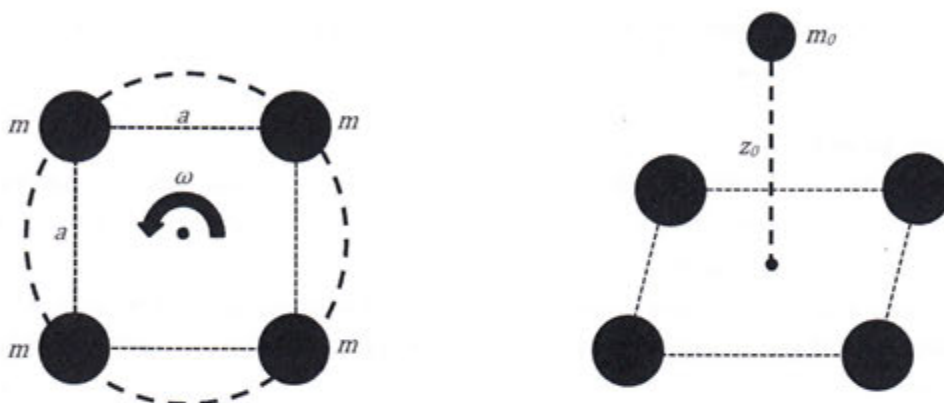
- e) Schets in één grafiek de oorspronkelijke, de doorgelaten en de gereflecteerde puls als functie van  $x$ .  
Uit de grafiek moet blijken hoe de piekhoogtes en breedtes zich ongeveer tot elkaar verhouden.



**Opgave 5 (norm: 25 punten)**

Vier even grote (punt)massa's  $m$  bevinden zich in de ruimte op de hoekpunten van een denkbeeldig vierkant met ribbe  $a$  (zie de figuur links). Deze massa's roteren om hun gemeenschappelijke massamiddelpunt en volgen daarbij een cirkelvormige baan zoals getekend.

*Tip: mocht de uitwerking van een onderdeel problemen opleveren, maak dan in elk geval duidelijk welke aanpak je gekozen hebt.*



a) *Wat is de periode van de cirkelbeweging indien de baan stabiel is?*

Een waarnemer merkt op dat de rotatiesnelheid van de massa's vijf keer sneller is dan bij a) is berekend. Een verklaring hiervoor is de aanwezigheid van een bolvormige massa  $M$  en straal  $R_0$  in het middelpunt van het vierkant. Neem voor het volgende aan de massa in dit object uniform verdeeld is.

b) *Geef de formule voor massa  $M$ , uitgedrukt in de overige variabelen.*

Een puntdeeltje met massa  $m_0$  dat zich op de symmetrie-as van het systeem bevindt, wordt vanuit rust losgelaten van een afstand  $z_0$  ( $>R_0$ ) van het middelpunt van het vierkant (zie de rechter figuur).

c) *Laat zien dat de grootte  $F$  van de kracht op het deeltje langs de symmetrie-as gelijk is aan*

$$F = \frac{Gm_0M}{z^2} + \frac{4Gm_0mz}{(z^2 + a^2/2)^{3/2}}$$

Hierbij is  $z$  de afstand tot het middelpunt van het vierkant, gemeten langs de symmetrie-as.

d) *Bereken de snelheid waarmee het deeltje inslaat op het voorwerp in het midden van het vierkant.*

*Hint: bij het oplossen van dit probleem kan de volgende integraal nuttig zijn:*

$$\int \frac{x}{(x^2 + c^2)^q} dx = \frac{-1}{2(q-1)} \frac{1}{(x^2 + c^2)^{q-1}} \text{ voor alle } q \neq 1$$