Uitwerkingen tentamen Differentiaalvergelijkingen voor TN/Gewone differentiaalvergelijkingen, juni 2005

Opgave 1

(a) De algemene oplossing kan worden bepaald door middel van scheiding van variabelen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -2\frac{t}{y} \\ \int y\,dy &= \int(-2t)dt \\ \tfrac{1}{2}y^2 &= -t^2 + C \\ y &= \pm\sqrt{A-2t^2} \qquad \text{met } A = 2C. \end{aligned}$$

Om de constante A te bepalen gebruiken we de beginvoorwaarde $y(0) = 2$. Dit impliceert het plus-teken in de algemene oplossing, en

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \\ \sqrt{A} &= 2 \\ A &= 4. \end{aligned}$$

Dus de exacte oplossing van het beginwaardeprobleem wordt gegeven door

$$y(t) = \sqrt{4-2t^2}.$$

(b) Op het existentieinterval moet gelden $4 - 2t^2 > 0$, zodat de wortel gedefinieerd is. Tevens moet het punt $t = 0$ bevat zijn in het existentieinterval. Het volgt dat

$$\begin{aligned} 2t^2 &< 4 \\ -\sqrt{t} < t &< \sqrt{t}. \end{aligned}$$

Dus het existentieinterval is $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Opgave 2

(a) Het karakteristiek polynoom is gelijk aan

$$\begin{aligned} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+2) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+5). \end{aligned}$$

De wortels volgen met de ABC formule

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2+i, \quad \lambda_3 = 2-i.$$

De eerste eigenvector kan direct worden afgelezen, en wordt gegeven door $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)^T$ (verifieer dit als het niet direct duidelijk is). De tweede eigenvector bepalen we met vegen

$$\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 0 \\ 0 & 1-i & 2 \\ 0 & -1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & -1 & -1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbij heb ik de tweede rij gedeeld door $(1-i)$. Ter herinnering: deling door een complex getal gaat als volgt $\frac{2}{1-i} = \frac{(1+i)2}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1+i)2}{1^2+1^2} = \frac{(1+i)2}{2} = (1+i)$. Het resulterende stelsel is:

$$\begin{aligned} &x_1 = 0 \\ &x_2 + (1+i)x_3 = 0 \end{aligned}$$

Hierin is x_3 vrij. Een niet-triviale oplossing wordt bijvoorbeeld gegeven door

$$x_3 = 1, \quad x_2 = -(1+i)x_3 = (1+i) \quad , x_1 = 0.$$

Dit geeft de eigenvector $\mathbf{v}_2 = (0, -1-i, 1)^T$. Voor de derde eigenvector geldt $\mathbf{v}_3 = \overline{\mathbf{v}_2} = (0, -1+i, 1)^T$.

Drie lineair onafhankelijke oplossingen worden gegeven door

$$e^t\mathbf{v}_1, \quad e^{(2+i)t}\mathbf{v}_2, \quad e^{(2-i)t}\mathbf{v}_3.$$

De tweede en derde oplossing zijn complex. Reele oplossingen worden gegeven door het reële en imaginaire deel van de tweede oplossing. Dus we schrijven

$$\begin{aligned} e^{(2+i)t}\mathbf{v}_2 &= e^{2t}(\cos(t) + i\sin(t)) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{2t} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

We hebben nu drie reële lineair onafhankelijke oplossingen, nl.

$$\mathbf{y}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(t) = \operatorname{Re} e^{(2+i)t}\mathbf{v}_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -cos(t) + \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \text{en}$$

$$\mathbf{y}_3(t) = \operatorname{Im} e^{(2+i)t}\mathbf{v}_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

De algemene oplossing wordt gegeven door $C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 + C_3\mathbf{y}_3$.

(b) Er geldt

$$e^{At} = Y(t)Y(0)^{-1},$$

waarbij $Y(t)$ de fundamentele matrix is die wordt gegeven door

$$Y(t) = [\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3].$$

We vinden dat $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Met behulp van vegen volgt (de berekening laat ik hier achterwege)

$$Y(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alles invullen en de matrices vermenigvuldigen geeft

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}(\cos(t) + \sin(t)) & 2e^{2t}\sin(t) \\ 0 & -e^{2t}\sin(t) & e^{2t}(\cos(t) - \sin(t)) \end{pmatrix}.$$

Opgave 3

(a) x-nullcline:

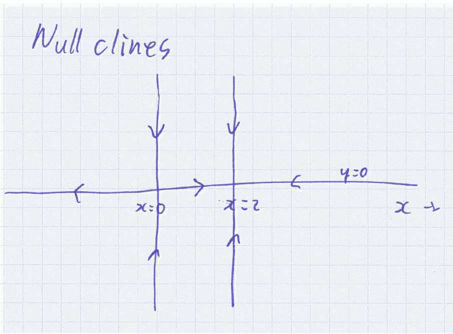
$$\tfrac{1}{2}x(2-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \vee x = 2.$$

y-nullcline:

$$-2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0.$$

De evenwichtspunten zijn $(0,0)$ en $(2,0)$.

Om de richting aan te geven berekenen we het vectorveld voor enkele punten op de x-nullcline: Voor $(x,y) = (0,1)$ $(f,g) = (0,-2)$, $(x,y) = (0,-1)$ $(f,g) = (0,2)$, $(x,y) = (2,1)$ $(f,g) = (0,-2)$, $(x,y) = (2,-1)$ $(f,g) = (0,2)$. Voor enkele punten op de y-nullcline: $(x,y) = (-1,0)$ $(f,g) = (-\frac{3}{2},0)$, $(x,y) = (1,0)$ $(f,g) = (\frac{1}{2},0)$, $(x,y) = (3,0)$ $(f,g) = (-\frac{3}{2},0)$. Dit geeft het volgende plaatje.



(b) Lineariseren:

$$J = \begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

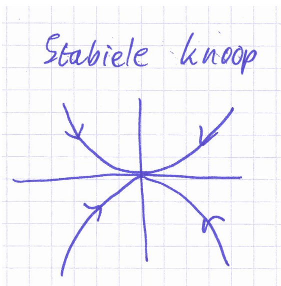
Voor $(0,0)$ geeft dit voor de matrix van de linearisatie

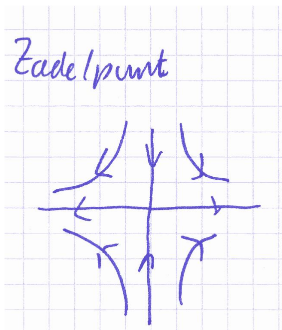
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

oftewel een zadelpunt. Voor $(2,0)$ geeft dit

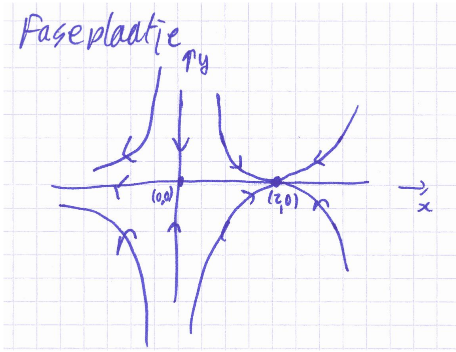
$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

oftewel een stabiele knoop (nodal sink). De plaatjes zijn





(c)



Opgave 4

(a) Voor de rand $r = 1$ moeten we laten zien dat r niet toeneemt, zodat de oplossingen binnen de ring blijven. We moeten dus laten zien dat

$$r' \leq 0 \quad \text{voor } r = 1.$$

Voor de rand $r = 1/3$ moeten we laten zien dat r niet afneemt, oftewel

$$r' \geq 0 \quad \text{voor } r = 1/3.$$

De afgeleide van r kan als volgt worden bepaald. Enerzijds hebben we

$$(r^2)' = 2rr'.$$

anderzijds

$$(r^2)' = (x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy'.$$

Dus

$$\begin{aligned} rr' = xx' + yy' &= x^2 - xy - x^2(3x^2 + y^2) + xy + y^2 - y^2(2x^2 + y^2) \\ &= x^2 + y^2 - x^2(3x^2 + y^2) - y^2(2x^2 + y^2) \\ &= r^2 - x^2(3x^2 + y^2) - y^2(2x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Je kunt deze uitdrukking op verschillende manieren verder uitwerken. Een manier is om $x = r\cos(\theta)$ en $y = r\sin(\theta)$ in te vullen. Een andere mogelijkheid is om te schrijven

$$\begin{aligned} rr' &= r^2 - (x^2 + y^2)(2x^2 + y^2) - x^4 \\ &= r^2 - r^4 - x^2 r^2 - x^4. \end{aligned}$$

Neem nu aan $r = 1$. Dan $rr' = 1 - 1 - x^2 - x^4 = -x^2 - x^4 \leq 0$. Dus geldt ook dat $r' \leq 0$. Als $r = 1/3$ dan $rr' = 1/9 - 1/81 - 1/9x^2 - x^4$. Omdat $-1/3 \leq x \leq 1/3$ volgt dan dat $0 \leq x^2 \leq 1/9$, dus $rr' \geq 1/9 - 3/81 = 2/27 > 0$. Dus ook $r' > 0$. Dus de ring gegeven door $1/3 < r < 1$ is positief invariant.

(b) Uit het bovenstaande volgt dat de ring $1/3 \leq r \leq 1$ positief invariant is. Bekijk een oplossing die in het gebied begint. Omdat het gebied positief invariant is zal die oplossing het gebied niet verlaten. Het is een gesloten en begrensd gebied, de oplossing heeft dus een limietverzameling. Volgens de stelling van Bendixson is dit of een evenwichtspunt, of een gesloten oplossingskromme (limietcykel), of een graaf. Het gebied bevat geen evenwichtspunten, dus blijft alleen de tweede mogelijkheid over. De oplossing convergeert dus naar een limietcykel.

Opgave 5

(a) We lineariseren het stelsel, bereken eerst de Jacobiaan

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2 - 9x^2 & 1 - 2xy \\ -2 - 2xy & -x^2 - 6y^2 \end{pmatrix}$$

De matrix horend bij de linearizatie in $(0,0)$ wordt gegeven door

$$A \stackrel{\text{def}}{=} J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De eigenwaarden zijn

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{2}.$$

De oorsprong is een centrumpunt. De linearisatie geeft dus geen uitsluitsel over de stabiliteit (zie boek p. 553).

(b)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2axx' + 2byy' \\ &= 2ax(y - xy^2 - 3x^3) + 2b(-2x - x^2y - 2y^3) \\ &= (2a - 4b)xy - (2a + 2b)x^2y^2 - 6ax^4 - 4by^4. \end{aligned}$$

Voor kleine waarden van x, y overheerst de lagere orde term $(2a - 4b)xy$. Als $2a - 4b \neq 0$ dan neemt deze term zowel positieve als negatieve waarden aan in een omgeving van de oorsprong. Daaruit leiden we af dat $2a - 4b = 0$, dus $a = 2b$. Voor $y = 0$ is $\dot{V} = -6ax^4$. Dus moet $a > 0$. Voor $x = 0$ is $\dot{V} = -4by^4$, dus moet $b > 0$. Daarom moet gelden $a = 2b$ en $a, b > 0$. Door in te vullen in de formule voor $\dot{V}$ zie je dat dan inderdaad $\dot{V}(x,y) < 0$ behalve voor $(x,y) = (0,0)$, zodat $\dot{V}$ inderdaad negatief definiet is.

(c) Kies a en b zodat ze voldoen aan de bovenstaande voorwaarden, bijvoorbeeld $a = 2$ en $b = 1$. De functie V is dan continu differentieerbaar, gedefinieerd op een omgeving van $(0,0)$, en positief definiet met een minimum in $(0,0)$. Verder geldt dat $\dot{V}$ negatief definiet is. V is dus een sterke Lyapunov functie en het punt $(0,0)$ is asymptotisch stabiel.

Opgave 6

(a) Vul $u(x,y) = X(x)Y(y)$ in in de partiële differentiaalvergelijking. Dit geeft

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(Y) = 0,$$

oftewel

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

Hierin is de linkerkant onafhankelijk van y en de rechterkant onafhankelijk van x. Omdat beide termen gelijk aan elkaar moeten zijn, moeten beide dus gelijk zijn aan een constante, laten we zeggen $-\lambda$. Dus

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad \Leftrightarrow \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

en

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

(b) De randvoorwaarden zijn

$$X(0) = 0, \quad X'(1) = 0.$$

We bekijken nu de oplossingen van $X''(x) + \lambda X(x) = 0$. We bekijken apart de gevallen $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ en $\lambda > 0$. Voor $\lambda < 0$ heeft dit als lineair onafhankelijke oplossingen $e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$. Vul in $Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Uit de eerste randvoorwaarde volgt $A = -B$. Uit de tweede randvoorwaarde volgt vervolgens dat $A = B = 0$, oftewel $X(x) = 0$. Er zijn dus geen eigenfuncties voor $\lambda < 0$. Voor $\lambda = 0$ is de algemene oplossing $X(x) = Ax + b$. Uit de randvoorwaarden volgt weer dat $A = B = 0$. Er zijn dus ook geen eigenfuncties voor $\lambda = 0$. Voor $\lambda > 0$ worden de oplossingen gegeven door $A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$. Uit de eerste randvoorwaarde volgt $B = 0$. De tweede randvoorwaarde wordt

$$0 = \frac{d}{dx}\sin(\sqrt{\lambda}x)\bigg|_{x=1} = \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda})$$

Dit heeft als oplossing

$$\sqrt{\lambda} = (\tfrac{1}{2} + k)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Er zijn dus eigenwaarden

$$\lambda_k = ((\tfrac{1}{2} + k)\pi)^2$$

met eigenfuncties

$$\sin((\tfrac{1}{2} + k)\pi x).$$

Voor $\lambda > 0$ worden de oplossingen voor Y gegeven door

$$ce^{-\sqrt{\lambda}y} + de^{+\sqrt{\lambda}y}.$$

Dit kan worden herschreven (met nieuwe constantes C, D) als

$$C\sinh(\sqrt{\lambda}y) + D\sinh(\sqrt{\lambda}y)$$

We hebben nu een oplossing in de vorm van een oneindige som

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)Y_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin((\tfrac{1}{2} + k)\pi x)[C_k\sinh((\tfrac{1}{2} + k)\pi y) + D_k\cosh((\tfrac{1}{2} + k)\pi y)].$$

We kijken nu naar de randvoorwaarden voor $y = 0$ en $y = 1$. Op $y = 0$ wordt u gegeven door

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin((\tfrac{1}{2} + k)\pi x)D_k.$$

Het volgt dat $D_k = 0$ voor alle k. Op $y = 1$ wordt u gegeven door

$$u(x,1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sin((\tfrac{1}{2} + k)\pi x)C_k\sinh((\tfrac{1}{2} + k)\pi).$$

De functie h lijkt op de eigenfunctie voor $k = 1$. Kies nu $C_1 = \frac{2}{\sinh(3\pi/2)}$ en $C_k = 0$ voor $k \neq 1$. Dan is ook aan de randvoorwaarde op $y = 1$ voldaan. De oplossing voor u wordt dan gegeven door

$$u(x,y) = \frac{2}{\sinh(3/2\pi)}\sin(\tfrac{3}{2}\pi x)\sinh(\tfrac{3}{2}\pi y).$$