Examen Differentiaalvergelijkingen
TWB1 & TWB2 (156012) TN & AT (156013)
29 juni 2009

1. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x - x^3 = 0$$

   (a) Schrijf de vergelijking als een stelsel van twee eerste orde differentiaalvergelijkingen.

   (b) Bepaal de evenwichtsoplossingen met bijbehorende gelineariseerde vergelijkingen.

   (c) Bepaal de aard van de evenwichtsoplossingen en schets de fasestroming in de buurt van het evenwicht in het $x, \dot{x}$-vlak.

2. Gegeven zijn de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   en de vector

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (a) bepaal een fundamentaalmatrix (fundamental matrix) van de vergelijking

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1}$$

   (b) Is de oorsprong van (1) stabiel of instabiel. Verklaar het antwoord.

   (c) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3. Gegeven is het stelsel

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = 1 - 3q^2 \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Laat zien dat het stelsel Hamiltoniaans is en bepaal de bijbehorende Hamiltoniaan (behouden grootheid).

   (b) Bepaal de evenwichten van (2).

   (c) Voor welke waarden van de Hamiltoniaan heeft de vergelijking periodieke banen.

4. Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 4x_2^3 \\ \dot{x_2} = -x_1 - x_2 \end{cases} \tag{3}$$

   en de functie $V : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^4$$

   (a) Geef de definitie van een strikte Lyapunov functie.

   (b) Bepaal een geschikte waarde van a zó dat V een strikte Lyapunov functie is voor (3) rond de oorsprong.

   (c) Wat is het aantrekkingsgebied van de oorsprong (basin of attraction).

   (d) Bewijs dat $\tilde{V} = x_1^2 + x_2^2$ ook een strikte (strong) Lyapunov functie is voor (3) rond de oorsprong.

   (e) Waarom is V te verkiezen boven $\tilde{V}$.

Som 5 is alleen voor de TW B2 studenten.

5. Laat $t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n$ een begrensde baan zijn, gedefineerd op $\mathbb{R}_+$.

   (a) Geef de definitie van de ω-limietverzameling van de baan.

   (b) Bewijs dat de ω-limietverzameling gesloten en begrensd is.

   (c) Als nu extra gegeven is dat $t \mapsto x(t)$ de baan is van een autonome differentiaalvergelijking, $\dot{x} = f(x)$, met f een continu differentieerbare functie, welke twee extra eigenschappen heeft de ω-limietverzameling dan.

   (d) Gegeven is het vectorveld

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \mu x_1 - x_2 - 3x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x_2} = -x_1 + \mu x_2 - 2x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{4}$$

   Laat zien dat als $\mu < 0$ het vectorveld (4) geen periodieke banen heeft.

   (e) Bewijs dat als $\mu > 0$ het gebied

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\mu}{3} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{\mu}{2}\}$$

   positief invariant is voor de stroming van (4). Laat zien dat voor $\mu > 0$ het vectorveld (4) tenminste één periodieke baan heeft.

Som 6 is alleen voor de TN en AT studenten.

6 Gegeven is de golfvergelijking

$$u_{tt}(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, \tag{5}$$

op het gebied $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Hoe transformeert vergelijking (5) door over te gaan op de nieuwe coordinaten

$$\xi = x - 2t, \quad \eta = x + 2t$$

   (b) Laat zien dat $u(x,t) = f(x + 2t)$ een oplossing is van (5). Aan welke eerste orde partiële differentiaalvergelijking voldoet deze oplossing als f een continu differentieerbare funcite is?

   (c) Beschouw dezelfde vergelijking maar nu op het gebied $0 < x < 1$ en $t > 0$. Bepaal de oplossing van het beginwaarde probleem als gegeven is dat

$$u(x,0) = sin(4\pi x)$$
$$u_t(x,0) = 0$$