Tentamen (Gewone) Differentiaalvergelijkingen

Vakcode	:	TW 156012
		TN 156013
Datum	:	Maandag 28 juni 2010
Tijdstip	:	8:45-11:45
Plaats	:	Sportcentrum

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1. Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy(t)}{dt} = y(t)\ln(t), \quad \text{met} \quad y(1) = y_0.$$

Geef ook het existentieinterval van de oplossing.

Opgave 2. Bepaal e^{At} voor $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Opgave 3. Gegeven het systeem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & ax - 2y + x\left(2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2\right), \\ \dot{y} & = & 2x + ay + y\left(2(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2\right) \end{array} \right. \tag{1}$$

met een constante a.

(a) Transformeer het stelsel naar poolcoördinaten.

(b) Bepaal alle a zodat (1) twee periodieke banen heeft.
Als u het voorgaande deel niet heeft kunnen maken, gebruik dan $r' = r(a - 2r + r^2)$.

(c) Teken het faseplaatje voor $a = -2$, $a = -\frac{1}{2}$ en $a = 1$.

Opgave 4. Gegeven het systeem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x(1 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} & = & y(3 - x - 3y). \end{array} \right.$$

(a) Laat zien dat het vierkant $S = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ positief invariant is.

(b) Teken de nullclines en bepaal twee positief invariante gebieden binnen het eenheidsvierkant S.

(c) Beargumenteer dat er geen periodieke baan in S is.

(d) Bepaal het limietgedrag voor oplossingen met beginwaarden in het gebied $x, y \ge 0$.

Opgave 5. Gegeven het systeem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 2y - x + x^2, \\ \dot{y} & = & (2 - 3x)(x - \frac{y}{2}). \end{array} \right. \tag{2}$$

(a) Bepaal de drie evenwichten.

(b) Bepaal de linearisatie rond de evenwichten en benoem het type evenwicht.

(c) Schets het faseplaatje van de linearisatie rond de oorsprong.

(d) We definiëren de functie $H(x,y) = x^2(1-x) - y^2$. Laat zien dat de niveauverzameling $H(x,y) = 0$ bestaat uit banen.

(e) Laat zien dat systeem (2) een homocliene baan (directed graph) heeft.

Opgave 6. *Alleen voor Differentiaalvergelijkingen voor TN (156013)*
Bepaal de oplossing $u(x, y)$ van de Laplace vergelijking

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0$$

op het vierkant $0 < x < 1, 0 < y < 1$ met de volgende randvoorwaarden

$$u(0,y) = u_x(1,y) = 0, \quad u(x,0) = \cos(\pi x), \quad u(x,1) = 0.$$

Aanwijzing: U kunt de volgende stappen volgen

(a) Substitueer $u(x,y) = X(x)Y(y)$ en stel de gewone differentiaalvergelijking voor $X(x)$ met bijbehorende randvoorwaarden op. Noteer ook de gewone differentiaalvergelijking voor $Y(y)$.

(b) Bepaal de basisoplossingen $X_n(x)$ en de eigenwaarden.

(c) Bepaal de oplossingen $Y_n(y)$ m.b.v. Fouriercoëfficiënten en gebruik hierbij eventueel dat $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

Normering voor TW:

1.	3	4.a	2	5.a	2
2.	6	4.b	3	5.b	3
3.a	2	4.c	1	5.c	2
3.b	2	4.d	2	5.d	3
3.c	3			5.e	2

Totaal: 36 + 4 punten

Normering voor TN:

1.	2	4.a	2	5.b	2
2.	6	4.b	2	5.c	1
3.a	2	4.c	1	5.d	3
3.b	2	4.d	1	5.e	2
3.c	2	5.a	2	6	6