Opgave 1.

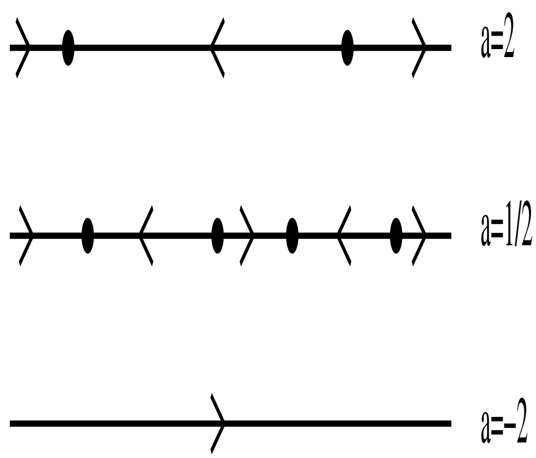
(a) De eigenwaarden zijn $\lambda_1 = -2$ met $v_1 = (1,1)^T$ en $\lambda_2 = -5$ met $v_2 = (1,-2)^T$. Voor een fundamentele matrix nemen we $Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-5t} \\ e^{-2t} & -2e^{-5t} \end{pmatrix}$ met $Y(0) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. We vinden dan

$$e^{At} = Y(t)Y(0)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-5t} + 2e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-5t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-5t} & 2e^{-5t} + e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

(b) Met variatie van constanten voor de probeeroplossing $y = e^{At}c$ vinden we $c' = (1,1)^T$ en $c = t(1,1)^T$. Dus

$$y(t) = e^{At}(y_0 + c) = \begin{pmatrix} -e^{-5t} + te^{-2t} \\ 2e^{-5t} + te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Opgave 2.

(a) 

Figuur 1: Faselijnen bij 2a.

(b) We bepalen $U(q)' = 0 = q(q-1)(2q-5)$. Dus $U(1) = \frac{2}{3}$ en $U(\frac{5}{2}) = \frac{-125}{96}$. We hebben dus twee evenwichten voor $a \in (\frac{-125}{96}, 0) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$.

Opgave 3.

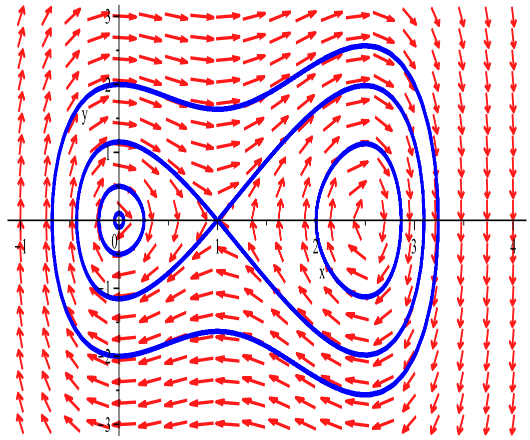
(a) De linearisatie geeft de eigenwaarden -1 en $\pm i$. Die laatsten hebben reëel deel nul en geven dus niets aan m.b.t. stabiliteit.

(b) Een Lyapunov functie V is positief definiet in een omgeving U van een punt p met $V(p) = 0$ en verder is dV/dt negatief (semi-)definiet op U.

(c) $V = x^2 + y^2 + z^2$ is positief definiet en $V' = -2x^4 - 2z^2$ is negatief semidefiniet en daarmee is V een Lyapunov functie.

(d) De stelling van Lyapunov geeft ons alleen dat de oorsprong stabiel is. Dus we gebruiken Lasalle's Invariantieprincipe dat de omega-limietverzameling bevat is in $S = \{p \in \mathbb{R}^3 | V'(p) = 0\}$. Dus S is de lijn $x = z = 0$. De enige invariante verzameling in S is de oorsprong zelf, want $x' = y$ voor $x = 0$. Dus de omega-limietverzameling is de oorsprong voor elke beginvoorwaarde. Daarmee is de oorsprong asymptotisch stabiel met attractiegebied $\mathbb{R}^3$.

Opgave 4.

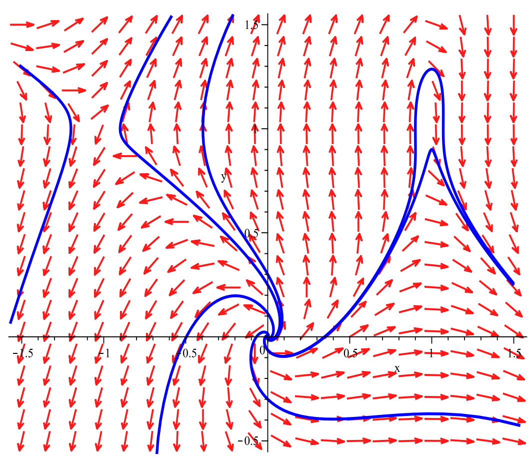


(c)

Figuur 2: Faseplaatje bij 2c.

(a) De evenwichten zijn [1] $(0,0)$ met eigenwaarden $1 \pm i$ dus een instabiele spiraal; [2] $(-1,1)$ met eigenwaarden $-1 \pm \sqrt{5}$ dus een zadel; [3] $(1,1)$ met eigenwaarden 0 (twee keer) dus gedegenereerd. De linearisaties worden gegeven door

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad DF(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad DF(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$



(b)

Figuur 3: Faseplaatje bij 4b. Alleen rond de evenwichten is gevraagd, maar het globale is hier gegeven. Rond (1,1) kun je het bovenlangsgaan afleiden uit de nullclines.

[ht!]

Opgave 5. We nemen $r^2 = x^2 + y^2$ zodat $rr' = x^2 + y^2 - (x^4 + 5x^2y^2 + y^4) = r^2(1 - r^2(1 + 3\sin^2(\phi)\cos^2(\phi))$. Dus voor $r = \frac{1}{2}$ is $r' = r(1 - r^2(1 + \frac{3}{4}\sin^2(2\phi))) > r(1 - 2r^2) = \frac{1}{4} > 0$ altijd positief. En voor $r = 2$ is $r' < r(1 - r^2) = -6 < 0$ altijd negatief. Dus het gebied met $\frac{1}{2} < r < 2$ is positief invariant. Het is aan te tonen dat de oorsprong het enige evenwicht is, maar dat gegeven is weggevallen in de vraagstelling. Nu kunnen we Poincaré-Bendixson toepassen zodat we bewezen hebben dat er een periodieke baan.