Tentamen (Gewone) Differentiaalvergelijkingen

Vakcode	:	TW 156012
		TN 156013
Datum	:	Vrijdag 20 augustus 2010
Tijdstip	:	13:45-16:45
Plaats	:	Sportcentrum

- Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan.

Opgave 1. Gegeven een matrix A en vectoren b en y_0

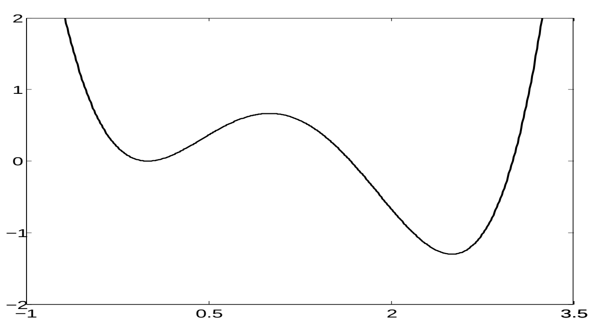
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad b(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bepaal e^{At}.

(b) Bepaal de oplossing van het beginwaardeprobleem

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + b(t), \quad \text{met} \quad y(0) = y_0.$$

Opgave 2. We bekijken de potentiaal $U(q) = \frac{1}{6}q^2(3q-5)(q-3)$, zie Figuur 1.



Figuur 1: grafiek van $U(q)$.

(a) Eerst nemen we de scalaire differentiaalvergelijking $q' = U(q) - a$ met a een constante. Teken faselijnen voor $a = 2$, $a = 1/2$ en $a = -2$.

(b) Geef alle a zodat $q' = U(q) - a$ precies twee evenwichten heeft.

(c) Neem nu de Hamiltoniaan $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + U(q)$. Teken het bijbehorende tweedimensionale faseplaatje.

Opgave 3. Gegeven het systeem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & y - x^3, \\ \dot{y} & = & -x - yz, \\ \dot{z} & = & -z + y^2, \end{array} \right. \tag{1}$$

met de oorsprong als enig evenwicht.

(a) Waarom kan er geen uitspraak gedaan worden over de stabiliteit van de oorsprong op grond van de linearisatie rond de oorsprong?

(b) Geef de definitie van een Lyapunov functie.

(c) Laat zien dat $V = x^2 + y^2 + z^2$ een Lyapunov functie is.

(d) Bewijs dat de oorsprong voor stelsel (1) asymptotisch stabiel is. Wat is het attractiegebied?

Opgave 4. Gegeven het systeem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & (x - y)(1 - y), \\ \dot{y} & = & (x + y)(1 - x). \end{array} \right.$$

(a) Bepaal de evenwichten en de linearisatie in de buurt van de evenwichten.

(b) Teken ook het faseplaatje in de buurt van deze evenwichten. Gebruik hiervoor eventueel nullclines.

Opgave 5. Gegeven het systeem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & x - y - x(x^2 + 3y^2), \\ \dot{y} & = & x + y - y(2x^2 + y^2). \end{array} \right.$$

Laat zien dat het systeem een periodieke baan heeft.

Opgave 6. *Alleen voor Differentiaalvergelijkingen voor TN (156013)*
Een geïsoleerde staaf met lengte π cm en warmte diffusieconstante $k = .1(cm^2/sec)$ wordt aan het ene uiteinde op 0°C gehouden en aan de andere op π°C. De toestand is stationair en vervolgens wordt de staaf omgedraaid waarbij het uiteinde met temperatuur van π°C nu op 0°C gehouden wordt en vice versa.

Hoe lang duurt het ongeveer voordat het temperatuurprofiel de toestand voor het omdraaien tot 0.01 graad nadert?

- Bepaal de eerste termen van de oplossing $u(x, y)$ van de warmte-vergelijking

$$u_t(t, x) = ku_{xx}(t, x)$$

met $0 < x < \pi$ en de volgende randvoorwaarden

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, \pi) = \pi, \quad u(0, x) = \pi - x.$$

- Maak een schatting hoe snel in de tijd de maximale amplitude afhankelijk van x van de eerste basisoplossing naar 0.01 is genaderd.

Normering voor TW:

1.a	4	3.a	2	4.a	3
1.b	3	3.b	2	4.b	3
2.a	3	3.c	2	5	4
2.b	2	3.d	3		
2.c	5				

Normering voor TN:

1.a	3	3.a	2	4.a	2
1.b	3	3.b	2	4.b	2
2.a	3	3.c	2	5	3
2.b	2	3.d	2	6	6
2.c	4				

Totaal: 36 + 4 punten