Faculteit Bedrijf, Bestuur en Technologie

Leerstoel Algemene Economie

Universiteit Twente

de ondernemende universiteit

Kenmerk: BBT.BA04D.040
Datum: 6 juni 2007

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Capitool 15 - A1-09

STANDAARDUITWERKING

Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (159061)
Datum: 13 augustus 2004

Opgave 1

a. $y(t\mathbf{x}) = 4(tx_1)^{1/4}(tx_2)^{1/4}(tx_3)^{1/4} = 4t^{3/4}x_1^{1/4}x_2^{1/4}x_3^{1/4} < 4x_1^{1/4}x_2^{1/4}x_3^{1/4} = y(\mathbf{x})$ voor $t > 1$.
Er zijn dus afnemende schaalopbrengsten: wanneer de inputs stijgen met een factor $t > 1$, neemt de output toe met minder dan die factor t.

b. $\text{MTSV}_{21} = -\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = \dfrac{x_1^{-3/4}x_2^{1/4}x_3^{1/4}}{x_1^{1/4}x_2^{-3/4}x_3^{1/4}} = \dfrac{x_2}{x_1}$

c. $\dfrac{1}{\sigma_{21}} = \dfrac{x_2/x_1}{\text{MTSV}_{21}}\dfrac{d\text{MTSV}_{21}}{d(x_2/x_1)} = \dfrac{x_2/x_1}{x_2/x_1}\dfrac{d(x_2/x_1)}{d(x_2/x_1)} = 1$, dus de substitutie-elasticiteit σ_{21} is 1.

Opgave 2

a. De productiefunctie wordt met $x_3 = 16$: $y = 8x_1^{1/4}x_2^{1/4}$; de hesse matrix is dan:

$$h = \begin{bmatrix} -1{,}5x_1^{-7/4}x_2^{1/4} & 0{,}5x_1^{-3/4}x_2^{-3/4} \\ 0{,}5x_1^{-3/4}x_2^{-3/4} & -1{,}5x_1^{1/4}x_2^{-7/4} \end{bmatrix}$$

$h_{i,i}$ <0 en de determinant van h is $2x_1^{-3/2}x_2^{-3/2}$ >0, dus h is negatief definiet en de productiefunctie is concaaf.

b. Als de productiefunctie concaaf is hebben winstmaximalisatie en kostenminimalisatie voor iedere combinatie van de prijzen een unieke oplossing en zijn de vraag en aanbodfuncties 'glad': ze zijn continu en de tweede afgeleide is overal gedefineerd.

c. $\min_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2 \quad \text{o.d.v. } 8x_1^{1/4}x_2^{1/4} = y$

Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda 2x_1^{-3/4}x_2^{1/4} \\ w_2 &= \lambda 2x_1^{1/4}x_2^{-3/4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{w_1}{w_2}x_1$$

Met de nevenvoorwaarde volgt: $8x_1^{1/4}\left(\dfrac{w_1}{w_2}x_1\right)^{1/4} = y \Rightarrow x_1 = \dfrac{y^2}{64}\sqrt{\dfrac{w_2}{w_1}} \Rightarrow x_2 = \dfrac{y^2}{64}\sqrt{\dfrac{w_1}{w_2}}$

De kostenfunctie is: $c(\mathbf{w}, y) = (1/32)y^2\sqrt{w_1w_2} + 16w_3$

d. De korte-termijn kostenfunctie ligt op of boven de lange-termijn kostenfunctie, omdat op lange termijn voor x_3 de optimale waarde kan worden gekozen, waarbij de totale kosten minimaal zijn. Bovendien is er en gemeenschappelijk punt van iedere korte-termijn kostenfunctie met de lange termijn kostenfunctie. Dit is het punt waarin de vaste waarde van x_3 optimaal is bij de gegeven prijzen en de gegeven omvang van y.

Opgave 3

a. Als pakket $\mathbf{x}^{++}$ beter is dan $\mathbf{x}^{+}$ en tevens pakket $\mathbf{x}^{+}$ beter is dan $\mathbf{x}$, geldt: $u(\mathbf{x}^{++}) > u(\mathbf{x}^{+})$ en $u(\mathbf{x}^{+}) > u(\mathbf{x})$. Uit de nutsfunctie volgt dan $u(\mathbf{x}^{++}) > u(\mathbf{x})$ en daarom is deze functie transitief.

b. De vergelijking van de indifferentiecurve voor het nut $u(\mathbf{x}) = u_0$ is: $x_2 = u_0 / x_1^3$.

c. $\max\limits_{x_1,x_2} x_1^3 x_2$ o.d.v. $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

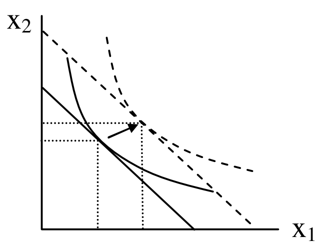
Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1^2 x_2 = \lambda p_1 \\ x_1^3 = \lambda p_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow 3p_2x_2 = p_1x_1 \text{ en } x_1 = x_2\frac{3p_2}{p_1}$$

Met de nevenvoorwaarde volgt dan: $4p_2x_2 = m \Rightarrow x_2 = \dfrac{m}{4p_2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{3m}{4p_1}$

De indirecte nutsfunctie is: $u(\mathbf{x}, m) = \left(\dfrac{3m}{4p_1}\right)^3 \dfrac{m}{4p_2} = \dfrac{27m^4}{256p_1^3p_2}$

d.



De indirecte nutsfunctie geeft het maximale nut dat men kan verkrijgen bij gegeven prijzen en een gegeven inkomen. Dit is het nut van de hoogste indifferentie-curve die kan worden bereikt.
Wanneer m stijgt, verschuift de budgetlijn evenwijdig van de oorsprong af. Er kan dan een hogere indifferentiecurve en dus een hoger nut worden bereikt. De indirecte nutsfunctie heeft dan een hogere waarde.

Opgave 4

a. In het optimum van de consument geldt: $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{3x_2}{x_1}$, zie opgave 3.

In het optimum van de producent geldt: $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{\partial F(\mathbf{x})/\partial x_1}{\partial F(\mathbf{x})/\partial x_2} = \dfrac{2x_1}{6x_2}$.

Dit volgt uit winstmaximalisatie: $\max\limits_{x_1,x_2} p_1x_1 + p_2x_2$ o.d.v. $x_1^2 + 3x_2^2 = 100$

Lagrange: $\left.\begin{array}{l} p_1 = \lambda 2x_1 \\ p_2 = \lambda 6x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{2x_1}{6x_2}$

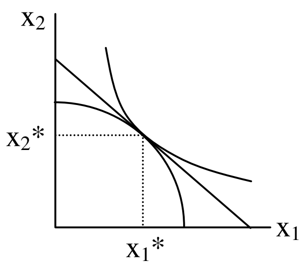
Uit de voorwaarden voor het optimum van consument en producent volgt:

$$\frac{3x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{2x_1}{6x_2} \Rightarrow 9x_2^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = 3x_2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = 1$$

De hoeveelheden volgen uit de productiefunctie: $9x_2^2 + 3x_2^2 = 1200 \Rightarrow x_2 = 10$ en $x_1 = 30$.

b. De situatie in het algemeen evenwicht is altijd Pareto-efficiënt.

c.

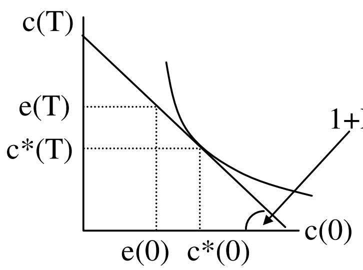


Het optimum is het raakpunt van de indifferentiecurve aan de productiemogelijkhedencurve. De gemeenschappelijke raaklijn in dit put is een scheidend hypervlak.

Opgave 5

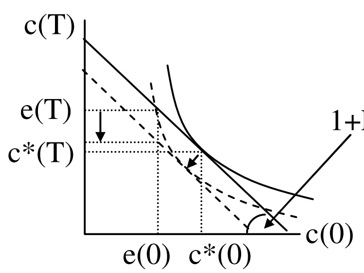
a. De budgetvoorwaarde is: $c(T) \leq e(T) + [e(0) - c(0)](1 + R)$.

b



Omdat $c^*(0) > e(0)$ leent de consument geld.

c



De budgetlijn verschuift evenwijdig naar links en uit de figuur blijkt dat $c^*(0)$ daalt

Opgave 6

a. Winst = $(1500 - 8Y)Y - (30.000 + 2Y^2)$
   eerste-orde voorwaarde: $1500 - 16Y - 4Y = 0 \Rightarrow Y = 75$
   $P = 1500 - 600 = 900$; winst = $67.500 - 41.250 = 26.250 > 0$

b. Winst 2: $(1500 - 8(y_1 + y_2))y_2 - (30.000 + 2y_2^2)$
   eerste-orde voorwaarde: $1500 - 8y_1 - 16y_2 - 4y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 75 - 0{,}4y_1$
   Winst 1: $(1500 - 8(y_1 + 75 - 0{,}4y_1))y_1 - (17.500 + 5{,}2y_2^2)$
   eerste-orde voorwaarde: $1500 - 9{,}6y_1 - 600 - 10{,}4y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 45$
   $y_2 = 75 - 18 = 57 \Rightarrow P = 1500 - 8(45 + 57) = 684$
   winst 1 = $30.780 - 28.030 = 2750 > 0$
   winst 2 = $38.988 - 36.498 = 2490 > 0$