Faculteit Bedrijf, Bestuur en Technologie
Leerstoel Algemene Economie

Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Kenmerk: BBT.BA05D.009
Datum: 6 juni 2007

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Capitool 15 - A109

STANDAARDUITWERKING

Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (159061)
Datum: 27 januari 2005

Opgave 1

a. $y(t\mathbf{x}) = (tx_1)^{1/2}(tx_2)^{1/4} = t^{3/4}x_1^{1/2}x_2^{1/4} < x_1^{1/2}x_2^{1/4} = y(\mathbf{x})$ voor $t > 1$.
Er zijn dus afnemende schaalopbrengsten: wanneer de inputs stijgen met een factor $t > 1$, neemt de output toe met minder dan die factor t.

b. $\text{MTSV}_{21} = -\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = \dfrac{0{,}5x_1^{-1/2}x_2^{1/4}}{0{,}25x_1^{1/2}x_2^{-3/4}} = 2\dfrac{x_2}{x_1}$

c. $\min\limits_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2$ o.d.v. $x_1^{1/2}x_2^{1/4} = y$
Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda 0{,}5x_1^{-1/2}x_2^{1/4} \\ w_2 &= \lambda 0{,}25x_1^{1/2}x_2^{-3/4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = 2\frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_1 = 2\frac{w_2}{w_1}x_2$$

Met de nevenvoorwaarde volgt: $\left(2\dfrac{w_2}{w_1}x_2\right)^{1/2} x_2^{1/4} = y \;\Rightarrow\; x_2 = 2^{-2/3}w_1^{2/3}w_2^{-2/3}y^{4/3}$

De voorwaardelijke vraagfunctie geeft bij gegeven prijzen en een gegeven productieniveau de optimale hoeveelheden van de inputs.

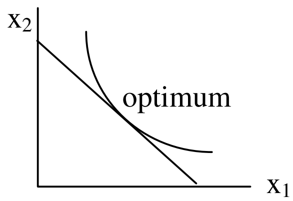
Opgave 2

a. De hesse matrix is $H = \begin{bmatrix} 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$

$h_{11} > 0$ (en de determinant van h is $-4x_1^2 < 0$), dus h is niet negatief (semi-)definiet en de nutsfunctie is niet concaaf.

b. De 'bordered' hesse matrix is $B = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1x_2 & x_1^2 \\ 2x_1x_2 & 2x_2 & 2x_1 \\ x_1^2 & 2x_1 & 0 \end{bmatrix}$

De determinant van B is $0 - 2x_1x_2(0 - 2x_1^3) + x_1^2(4x_1^2x_2 - 2x_1^2x_2) = 6x_1^4x_2 > 0$, dus de nutsfunctie is concaaf 'contoured'.

c. 

Als de nutsfunctie strikt concaaf 'contoured' is, is de verzameling $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \succsim \mathbf{x}^*\}$ van punten die minstens even goed zijn als $\mathbf{x}^*$, convex. Nutsmaximalisatie en kostenminimalisatie hebben dan een unieke oplossing en de (voorwaardelijke) vraagfuncties zijn continu.

d. $\max\limits_{x_1, x_2} x_1^2 x_2$ o.d.v. $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1x_2 &= \lambda p_1 \\ x_1^2 &= \lambda p_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow 2p_2x_2 = p_1x_1 \text{ en } x_1 = x_2\frac{2p_2}{p_1}$$

Met de nevenvoorwaarde volgt dan: $3p_2x_2 = m \Rightarrow x_2 = \dfrac{m}{3p_2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{2m}{3p_1}$

De indirecte nutsfunctie is: $u(\mathbf{x}, m) = \left(\dfrac{2m}{3p_1}\right)^2 \dfrac{m}{3p_2} = \dfrac{4m^3}{27p_1^2p_2}$

Deze geeft het maximale nut dat men kan bereiken bij een gegeven inkomen en gegeven prijzen.

Opgave 3

a. De contractcurve geeft alle goederenverdelingen over de consumenten die Pareto-efficiënt zijn.

b. In iedere Pareto-efficiënte situatie geldt dat de indifferentiecurven van de consumenten elkaar raken. Dat is het geval wanneer:

$$\frac{dx_{2A}}{dx_{1A}} = \frac{dx_{2B}}{dx_{1B}} \Rightarrow -\frac{\partial u_A/\partial x_{1A}}{\partial u_A/\partial x_{2A}} = -\frac{\partial u_B/\partial x_{1B}}{\partial u_B/\partial x_{2B}} \Rightarrow -\frac{2x_{1A}x_{2A}}{x_{1A}^2} = -\frac{x_{2B}^2}{2x_{1B}x_{2B}} \Rightarrow \frac{2x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{x_{2B}}{2x_{1B}}$$

Omdat geldt: $x_{1B} = 100 - x_{1A}$ en $x_{2B} = 150 - x_{2A}$ volgt:

$$\frac{2x_{2A}}{x_{1A}} = \frac{150 - x_{2A}}{2(100 - x_{1A})} \Rightarrow x_{2A} = \frac{150x_{1A}}{400 - 3x_{1A}}$$

Dit is de vergelijking van de contractcurve.

Opgave 4

a. $c(0) \le e(0) - (\theta_1 + 10\theta_2 + 20\theta_3 + 50\theta_4)$

$c(T,1) \le e(T,1) + (\theta_1 + 15\theta_2 + 25\theta_3 + 60\theta_4)$

$c(T,2) \le e(T,2) + (0{,}5\theta_1 + 12\theta_2 + 35\theta_3 + 75\theta_4)$

Hierin betreffen T,1 en T,2 de twee toestanden in de eindsituatie en is een index voor de betreffende handelaar weggelaten, omdat die hier niet relevant is.

b. De matrix **D** van uitbetalingen is: $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 15 & 25 & 60 \\ 0{,}5 & 12 & 35 & 75 \end{bmatrix}$

Er is geen lineair verband tussen de eerste twee kolommen van deze matrix en daarom is de rang van **D** gelijk aan 2, het aantal toestanden. Ieder consumptieproces is dan bereikbaar.

Men kan de rang ook als volgt bepalen. Trek de helft van de eerste rij af van de tweede rij:

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 & 25 & 60 \\ 0 & 4{,}5 & 22{,}5 & 45 \end{bmatrix}$$

Deel de tweede rij door 4,5 en trek 15 maal de nieuwe tweede rij af van de eerste:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -50 & -90 \\ 0 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Uit de eerste twee kolommen blijkt dat de rang van deze matrix 2 is.

c. De kosten zijn: $-3^1/_3 + {}^{20}/_9 = -1^1/_9$

De opbrengsten zijn: in toestand 1: $-3^1/_3 + {}^{30}/_9 = 0$

in toestand 2: $-{}^5/_3 + {}^{24}/_9 = +1$

De kosten zijn negatief, terwijl de opbrengsten niet negatief zijn. Dit is een definitie van een arbitragestrategie.

Opgave 5

a. Winst = $(3200 - 10Y)Y - (80.000 + 200Y + 5Y^2)$

eerste-orde voorwaarde: $3200 - 20Y - 200 - 10Y = 0 \Rightarrow Y = 100$

$P = 3200 - 1000 = 2200$; winst $= 220.000 - 150.000 = 70.000 > 0$

b. De gezamenlijke winst is:

$(3200 - 10(y_1+y_2))\,(y_1+y_2) - (80.000 + 200y_1 + 5\,y_1^2) - (30.000 + 800y_1 + 2\,y_2^2)$

De eerste-orde voorwaarden zijn:

$3200 - 20(y_1+y_2) - 200 - 10y_1 = 0$

$3200 - 20(y_1+y_2) - 800 - 4y_2 = 0$

Hieruit volgt: $200 + 10y_1 = 800 + 4y_2 \Rightarrow y_1 = 60 + 0,4y_2 \Rightarrow y_1+y_2 = 60 + 1,4y_2$

De tweede van de eerste-orde voorwaarden geeft dan:

$3200 - 20(60 + 1,4y_2) - 800 - 4y_2 = 0 \Rightarrow 32y_2 = 1200 \Rightarrow y_2 = 37,5$ en $y_1 = 60 + 15 = 75$

$Y = 75 + 35,5 = 112,5 \Rightarrow P = 3200 - 1125 = 2075$

$\text{winst}_1 = 155.625 - 123.125 = 32.500 > 0$

$\text{winst}_2 = 77.812,5 - 62.812,5 = 15.000 > 0$

Opgave 6

a. Door een toename van de finale leveringen in een bepaalde bedrijfstak met een eenheid neemt de productie van die bedrijfstak toe met meer dan een eenheid, omdat er intermediaire leveringen nodig zijn.

b. Zie de getransponeerde van de matrix $\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$: de prijsstijging is 1,18% in bedrijfstak 1 en 1,06% in bedrijfstak 2.

c. Direct inkomenseffect: 0,20 (matrix $\mathbf{B}$)

Direct en indirect inkomenseffect: 0,53 (matrix $\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$)

Totaal multpliereffect: 1,178 (matrix $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ in het model met gezinnen als productiesector)

Opgave 7

a. $Y = EV = C + I = 0,8Y + 3 + 0,11Y + 15 \Rightarrow 0,09Y = 18 \Rightarrow Y = 200$

b. $Y_t = EV_{t-1} = C_{t-1} + I_{t-1} = 0,8Y_{t-2} + Ca + 0,11Y_{t-1} + 0,89(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + Ia$

$Y_t - Y_{t-1} + 0,09Y_{t-2} = Ca + Ia$

Karakteristieke vergelijking: $k^2 - k + 0,09 = 0 \Rightarrow k = 0,9$ en $0,1$

Oplossing: $Y_t = Z_1(0,9)^t + Z_2(0,1)^t + (Ca+Ia)/0,09$

Na een evenwichtsverstoring ontstaat een monotone ontwikkeling en op den duur gaat de economie naar een evenwicht.