Faculteit Bedrijf, Bestuur en Technologie
Leerstoel Algemene Economie

Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Kenmerk: BSK.BA05D.023
Datum: 6 juni 2007

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Capitool 15 - A1-09

STANDAARDUITWERKING

Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (158061)
Datum: 12 april 2005

Opgave 1

a. De hessematrix is: $\frac{a}{4}\begin{bmatrix} -x_1^{-3/2}x_2^{1/2} & x_1^{-1/2}x_2^{-1/2} \\ x_1^{-1/2}x_2^{-1/2} & -x_1^{1/2}x_2^{-3/2} \end{bmatrix}$

De elementen op de hoofddiagonaal zijn negatief en de determinant is nul, zodat de hessematrix negatief semidefiniet is en dan is de productiefunctie concaaf.

b. $y(t\mathbf{x}) = a\sqrt{tx_1}\sqrt{tx_2} = t\cdot y(\mathbf{x})$; er zijn dus constante schaalopbrengsten.

c. Als bij een bepaald productieniveau (bij gegeven prijzen) winst wordt gemaakt, levert een tweemaal zo grote productie tweemaal zoveel winst op; het optimale productieniveau is dan oneindig groot.
Als bij een bepaald productieniveau (bij gegeven prijzen) verlies wordt geleden, levert ieder productieniveau verlies op. Het optimum is dan een productie van nul.
Als bij een bepaald productieniveau (bij gegeven prijzen) de winst nul is, is dat ook het geval bij ieder ander productieniveau. De optimale productie is dan onbepaald.

d. $\min\limits_{x_1,x_2} w_1x_1 + w_2x_2$ o.d.v. $a\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = y$

Lagrange: $$\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda a\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \\ w_2 &= \lambda a\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{w_1}{w_2}x_1$$

Substitutie in de nevenvoorwaarde geeft:

$$a\sqrt{x_1}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}x_1} = y \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{y}{a}\sqrt{\frac{w_2}{w_1}} \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{y}{a}\sqrt{\frac{w_1}{w_2}}$$

De kostenfunctie is dan: $w_1x_1 + w_2x_2 = 2(y/a)\sqrt{w_1w_2}$

Deze geeft de minimale kosten die bij de gegeven technologie en de gegeven prijzen van de inputs nodig zijn om een hoeveelheid y te produceren.

Opgave 2

a. Bij de prijzen $p_1 = 1$ en $p_2 = 1$ kost het pakket $\{x_1 = 60, x_2 = 40\}$ 100; de pakketten $\{x_1 = 70, x_2 = 20\}$ en $\{x_1 = 40, x_2 = 80\}$ kosten respectievelijk 90 en 120. Pakket 1 kan worden gekocht bij een inkomen van 100, maar pakket 2 niet. Het pakket $\{x_1 = 60, x_2 = 40\}$ is dus 'revealed preferred' t.o.v. pakket 1.
   Bij de prijzen $p_1 = 2$ en $p_2 = 1$ kosten de pakketten $\{x_1 = 60, x_2 = 40\}$, $\{x_1 = 70, x_2 = 20\}$ en $\{x_1 = 40, x_2 = 80\}$ alle 160. De keuze van pakket 1 is dan niet rationeel, omdat de consument dit in de uitgangssituatie ook kon kopen, maar de voorkeur gaf aan $\{x_1 = 60, x_2 = 40\}$. Hij kiest dus pakket 2.

b. Uitgangssituatie: $m = 100$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $x_1 = 60$, $x_2 = 40$.
   Nieuwe situatie met inkomenscompensatie: $m = 160$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $x_1 = 40$, $x_2 = 80$ (zie vraag a.)
   Substitutie-effect: $\Delta x_1 = -20$; $\Delta x_2 = +40$
   Nieuwe situatie zonder inkomenscompensatie: $m = 100$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $x_1 = 25$, $x_2 = 50$
   Inkomenseffect: $\Delta x_1 = -15$; $\Delta x_2 = -30$

Opgave 3

$$\max_{c(0),c(T)} c(0)^{1,25} c(T) \text{ o.d.v. } c(T) - 1485 - [2475 - c(0)]\cdot 1,10$$

Lagrange: $$\left.\begin{aligned} c(0)^{0,25} c(T) &= \lambda \cdot 1,1 \\ c(0)^{1,25} &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1,25\frac{c(T)}{c(0)} = 1,1 \Rightarrow c(T) = 0,88\, c(0)$$

Substitutie in de nevenvoorwaarde geeft:

$0,88\ c(0) - 1485 - 2475\cdot 1,1 - 1,1\ c(0) = 0 \Rightarrow 1,98\ c(0) = 4207,5 \Rightarrow c(0) = 2125$

$c(0) = 2125 < e(0) = 2475$, dus de consument spaart.

Opgave 4

a. $x_{1A} + x_{1B} = 36 + 16$
   $m_A = 36p_1 + 20p_2$; $m_B = 16p_1 + 40p_2$
   $18 + 10p_2/p_1 + 4 + 10p_2/p_1 = 52 \Rightarrow 20p_2/p_1 = 30 \Rightarrow p_2/p_1 = 3/2$

b. Uitgangssituatie: $u_A = x_{1A}x_{2A} = 720$ en $u_B = x_{1B}x_{2B}^3 = 1.024.000$
   Evenwicht: $x_{1A} = 18 + 10\times 3/2 = 33$ en $x_{1B} = 4 + 10\times 3/2 = 19$
   $x_{2A} = 18\times 2/3 + 10 = 22$ en $x_{2B} = 12\times 2/3 + 30 = 38$
   $u_A = x_{1A}x_{2A} = 726$ en $u_B = x_{1B}x_{2B}^3 = 1.042.568$
   Het evenwicht is Pareto superieur ten opzichte van de uitgangssituatie omdat het nut van beide consumenten in het evenwicht hoger is dan in de uitgangssituatie.

c. Nee. Het nut geeft alleen de rangorde van de combinaties van goederen; de hoogte van het nut heeft geen betekenis.

Opgave 5

a. $P = 2000 - Y$
   Opbrengst van A: $[2000 - (y_A + y_B)]y_A$.
   Marginale opbrengst = marginale kosten: $2000 - 2y_A - y_B = 1075 + 3y_A$.
   Reactiefunctie van A: $5y_A = 925 - y_B \Rightarrow y_A = 185 - y_B/5$.
   Reactiefunctie B: $2000 - y_A - 2y_B = 100 + 8y_B \Rightarrow y_B = 190 - y_A/10$.
   Evenwichtsoplossing: $y_A = 185 - 38 + y_A/50 \Rightarrow y_A = 50\times 147/49 = 150$
   $y_B = 190 - 15 = 175$.

b. De bewering is juist.
Bij gegeven productie $y_B = Y^*$ is de inverse vraagfunctie van A: $P = 2000 - Y^* - Y$.
A maximaliseert zijn winst als een monopolist, gegeven deze vraagfunctie.

Opgave 6

a. De technische coëfficiënten zijn: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}32 & 0{,}16 \\ 0{,}08 & 0{,}14 \end{bmatrix}$

Wanneer de productie in bedrijfstak 2 stijgt met 50, neemt de werkgelegenheid toe met $0{,}16 \times 50 = 8$.

b. Er geldt: $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}75 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 2{,}00 \end{bmatrix}$

Wanneer de finale leveringen in bedrijfstak 2 stijgen met 50, neemt de productie in deze bedrijfstak toe met 100. De werkgelegenheid stijgt dan met $0{,}16 \times 100 = 16$.

c. Het verschil tussen de uitkomsten bij b. en c. is het gevolg van de intermediaire leveringen.

Opgave 7

a. De waarden van alle grootheden zijn constant, zodat geldt:
$Y - Y = 0{,}5(I - S) + 0{,}25(I - S) \Rightarrow S = I$
$0{,}2Y - 60 = 200 - 10(0{,}1Y - 94) = 1140 - Y \Rightarrow 1{,}2Y = 1200 \Rightarrow Y = 1000$

b. $I_t = 200 - 10R_t(0{,}1Y_t - 94) = 1140 - Y_t$
$I_t - S_t = 1140 - Y_t - 0{,}2Y_t + 60 = 1200 - 1{,}2Y_t$
De eerste vergelijking geeft dan tot de volgende differentievergelijking:
$Y_{t+1} - Y_t = 0{,}5(1200 - 1{,}2Y_t) + 0{,}25(1200 - 1{,}2Y_{t-1})$
$\Rightarrow Y_{t+1} - 0{,}4Y_t + 0{,}3Y_{t-1} = 900$
Karakteristieke vergelijking: $k^2 - 0{,}4k + 0{,}3 = 0$
Discriminant: $0{,}4^2 - 4 \cdot 0{,}3 = -1{,}04$, dus er zijn complexe wortels
Na een verstoring van het evenwicht ontstaat een cyclische ontwikkeling van Y_t omdat de wortels van de karakteristiek vergelijking complex zijn en de economie gaat op den duur naar een evenwicht omdat de coëfficiënt bij - in dit geval - Y_{t-1} kleiner dan één is.