Faculteit Bedrijf, Bestuur en Technologie
Capaciteitsgroep LEGS

Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

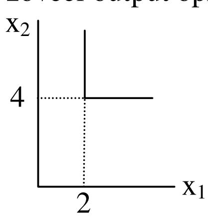
Kenmerk: LEGS07.D021
Datum: 6 juni 2007

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Capitool 15 - A1-09

STANDAARDUITWERKING
Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (158061)
Datum: 1 februari 2007

Opgave 1

a. Er is sprake van constante schaalopbrengsten, omdat t maal zoveel inputs ook t maal zoveel output oplevert.

b. 

Voor 1 eenheid output zijn 2 eenheden van x_1 en 4 eenheden van x_2 nodig.

c. Voor 1 eenheid output zijn 2 eenheden van x_1, 4 eenheden van x_2 en 5 eenheden van x_3 nodig, dus de kosten zijn: $5 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 10 \cdot 5 = 92$.

d. Voor y eenheden output zijn 2y eenheden van x_1, 4y eenheden van x_2 en 5y eenheden van x_3 nodig, dus de kostenfunctie is: $(2w_1 + 4w_2 + 5w_3)y$.

Opgave 2

a. $$\max_{x_1,x_2,x_3} P\left(3\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}\right) - \left(w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3\right)$$

$$P\frac{3}{2\sqrt{x_1}} - w_1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \frac{3}{2}\frac{P}{w_1} \Rightarrow x_1 = \frac{9}{4}\frac{P^2}{w_1^2}$$

$$P\frac{2}{2\sqrt{x_2}} - w_2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_2} = \frac{P}{w_2} \Rightarrow x_2 = \frac{P^2}{w_2^2}$$

$$P\frac{1}{2\sqrt{x_3}} - w_3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x_3} = \frac{1}{2}\frac{P}{w_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{4}\frac{P^2}{w_3^2}$$

Winstfunctie: $$P\left(3\frac{3}{2}\frac{P}{w_1} + 2\frac{P}{w_2} + \frac{1}{2}\frac{P}{w_3}\right) - \left(w_1\frac{9}{4}\frac{P^2}{w_1^2} + w_2\frac{P^2}{w_2^2} + w_3\frac{1}{4}\frac{P^2}{w_3^2}\right)$$

$$= \left(\frac{9}{4}\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{4}\frac{1}{w_3}\right)P^2$$

b. $\pi(t\mathbf{w}, tP) = \left(\frac{9}{4}\frac{1}{tw_1} + \frac{1}{tw_2} + \frac{1}{4}\frac{1}{tw_3}\right)(tP)^2 = t\left(\frac{9}{4}\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \frac{1}{4}\frac{1}{w_3}\right)P^2 = t \cdot \pi(t\mathbf{w}, tP)$

De winstfunctie is homogeen van de eerste graad in **w** en P.
Wanneer alle prijzen met een factor t worden vermenigvuldigd, stijgt de winst met diezelfde factor t.
Omdat de prijsverhoudingen niet veranderen, veranderen ook de optimale hoeveelheden niet, zodat de kosten en de opbrengsten beide met een factor t stijgen. Daardoor neemt ook de winst toe met een factor t.

Opgave 3

a. De 'bordered' hessematrix is: $\begin{bmatrix} 0 & 2x_2^2 & 4x_1x_2 \\ 2x_2^2 & 0 & 4x_2 \\ 4x_1x_2 & 4x_2 & 4x_1 \end{bmatrix}$

De determinant is gelijk aan $0 - 2x_2^2\left(8x_1x_2^2 - 16x_1x_2^2\right) + 4x_1x_2\left(8x_2^3\right) = 48x_1x_2^4 > 0$.
Omdat het teken van deze determinant positief is, is de nutsfunctie 'concaaf contoured'.

N.B. De hessematrix is: $\begin{bmatrix} 0 & 4x_2 \\ 4x_2 & 4x_1 \end{bmatrix}$, met determinant $-16x_2^2$

Omdat de determinant kleiner dan nul is, is de nutsfunctie niet concaaf.

b. De indirecte nutsfunctie ontstaat door substitutie van de vraagfuncties in de nutsfunctie:

$$v(\mathbf{p}, m) = 2\left(\frac{m}{3p_1}\right)\left(\frac{2m}{3p_2}\right)^2 = \frac{8}{27}\frac{m^3}{p_1p_2^2}$$

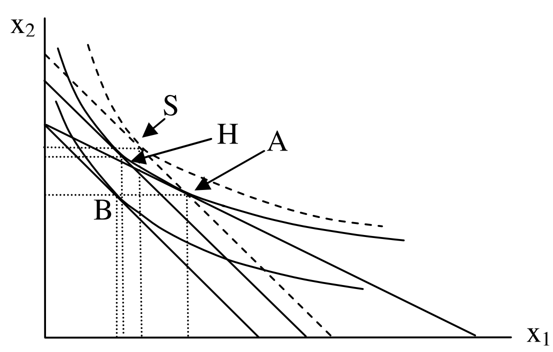
c. Zowel de nutsfunctie als de indirecte nutsfunctie geeft het niveau van het nut. De nutsfunctie geeft het nut van een bepaald pakket goederen. De indirecte nutsfunctie geeft het maximale nut dat men kan bereiken bij gegeven prijzen en een gegeven inkomen.

d. Bij $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1$ en $m = 300$ volgt uit de vraagfuncties: $x_1 = 200$ en $x_2 = 200$

Het nut is $2{\cdot}200{\cdot}200^2 = 16.000.000$ of : $\frac{8}{27}\frac{27.000.000}{0{,}5 \cdot 1} = 16.000.000$

Bij $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ en $u = 16.000.000$ volgt uit de voorwaardelijke vraagfunctie:
$h_1 = 100{\cdot}2^{1/3} = 125{,}9921 \approx 126$.
Bij $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ en $m = 300$ volgt uit de vraagfunctie: $x_1 = 100$.
Het substitutie-effect is dus $\Delta x_1 = 126 - 200 = -74$
en het inkomenseffect $\Delta x_1 = 100 - 126 = -26$.

e.



De getrokken lijnen en curven hebben betrekking op de effecten volgens Hicks.
De stippellijnen betreffen het substitutie-effect volgens Slutstky.
A is de uitgangssituatie bij $p_1 = 1/2$ en B de nieuwe situatie bij $p_1 = 1$ (en m = 100).
Van A naar H is het substitutie-effect en van H naar B het inkomenseffect bij Hicks.
Van A naar S en van S naar B zijn de betreffende effecten volgens Slutsky.

Bij de berekeningen volgens Hicks is het substitutie-effect gebaseerd op een constant nut. Men gaat vanuit situatie A langs de indifferentiecurve naar het punt H waarin de helling van de raaklijn gelijk is aan de nieuwe prijsverhouding. Van daaruit gaat men naar het nieuwe optimum, punt B. Deze overgang is het inkomenseffect.

Bij de berekeningen volgens Slutsky gaat men vanuit punt A langs de stippellijn met de nieuwe prijsverhouding naar punt S met de hoogste indifferentiecurve. Het inkomenseffect is nu de overgang van punt S naar punt B.
Uit de figuur blijkt dat de voorwaardelijke vraag naar goed 1 bij Hicks kleiner is dan bij Slutsky. Het substitutie-effect is bij Hicks dus groter en het inkomenseffect kleiner dan bij Slutsky.

Opgave 4

In het evenwicht is de marginale substitutieverhouding van de consument gelijk aan de marginale technische substitutieverhouding van de producent:

$$\frac{x_2}{4x_1} = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial\Phi/\partial x_1}{\partial\Phi/\partial x_2} = \frac{2x_1}{8x_2} = \frac{x_1}{4x_2} \Rightarrow 4x_2^2 = 4x_1^2 \Rightarrow x_2 = x_1$$

De prijsverhouding is dus: $p_1/p_2 = x_2/(4x_1) = 1/4 = (2x_1)/(8x_2)$
Met de transformatiecurve volgt dan: $5x_2^2 = 2000 \Rightarrow x_2 = 20$ en hieruit volgt $x_1 = x_2 = 20$.

Opgave 5

a. De winst van de volger is: $\left(2250-(y_1+y_2)\right)y_2-(180.000+100y_2+4y_2^2)$
Uit de eerste-orde voorwaarde voor een maximum volgt de reactiefunctie:
$2250 - y_1 - 2y_2 - 100 - 8y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 215 - 0{,}1y_1$
De winst van de leider is: $\left(2250-(y_1+215-0{,}1y_1)\right)y_1-(80.000+1075y_1+1{,}5y_1^2)$
Uit de eerste-orde voorwaarde voor een maximum volgt de oplossing:
$2250 - 2y_1 - 215 + 0{,}2y_1 - 1075 - 3y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 200 \Rightarrow y_2 = 195$
$\Rightarrow P = 2250 - 395 = 1855$
De winst van beide ondernemers is:
$\text{winst}_1 = 371.000 - 355.000 = 16.000 > 0$
$\text{winst}_2 = 361.725 - 351.600 = 10.125 > 0$

b.1 Het Cournot-Nash evenwicht is $y_1 = 196$ en $y_2 = 195$. In deze situatie wil geen van de producenten het niveau van de productie veranderen, bij het gegeven productieniveau van de andere producent.

b.2 Bij de gegeven alternatieven is het Cournot-Nash evenwicht Pareto-efficiënt. Bij een verschuiving naar $y_1 = 196$ en $y_2 = 183$ gaat de eerste producent erop vooruit, maar de tweede maakt dan minder winst. De tweede producent gaat erop vooruit bij een verschuiving naar een van de situaties met $y_1 = 162$, maar dan is de winst van de eerste ondernemer lager dan bij Cournot-Nash.

Opgave 6

a. Het totaal van de productie is gelijk aan het totaal van de leveringen. De import van de eerste bedrijfstak is dan (200 + 800 + 1000) − (200 + 500 + 400 + 200) = 700.

b. De technische coëfficiënten zijn:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 200/2000 = 0{,}1 & 800/5000 = 0{,}16 \\ 500/2000 = 0{,}25 & 2000/5000 = 0{,}4 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} K & K \\ 0{,}2 & 0{,}16 \\ K & K \end{bmatrix}$$

De invloed van de finale vraag op de primaire leveringen volgt uit $\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$.

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,9 & -0,16 \\ -0,25 & 0,6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1,2 & 0,32 \\ 0,5 & 1,80 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} K & K \\ 0,2 & 0,16 \\ K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,32 \\ 0,5 & 1,80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K \\ 0,32 & 0,352 \\ K & K \end{bmatrix}$$

Wanneer de finale vraag in de tweede bedrijfstak stijgt met 100, neemt de werkgelegenheid toe met 35,2 eenheden.

Opgave 7

a. $P_{E,t} = P_{t-1} = P_t$ (= P) en $Y_{v,t} = Y_{A,t} \Rightarrow 100 - 2P = -20 + P \Rightarrow 3P = 120 \Rightarrow P = 40$.

b. $100 - 2P_t = -20 + P_{t-1} + 0,5(P_{t-1} - P_{t-2}) \Rightarrow 2P_t + 1,5P_{t-1} - 0,5P_{t-2} = 120$
$\Rightarrow P_t + 0,75P_{t-1} - 0,25P_{t-2} = 60$; karakteristieke vergelijking: $k^2 + 0,75k - 0,25 = 0$
Discriminant $0,75^2 - 4\cdot(-0,25) = 1,5625$ en $k_1 = 0,25$, $k_2 = -1$.
De oplossing van de differentievergelijking is dus: $P_t = C_1(0,25)^t + C_2(-1)^t$ + constante
Er ontstaat een alternerende ontwikkeling en de prijs gaat niet terug naar het evenwicht.