Faculteit Management en Bestuur

Vakgroep LEGS

Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

Kenmerk: BBT.LEGS08.D011
Datum: 24 oktober 2008

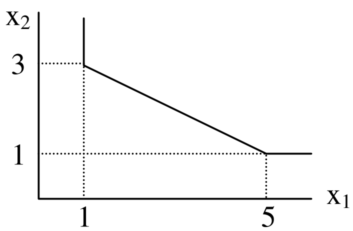
Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Capitool 15 - A1-09

STANDAARDUITWERKING

Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (158061)
Datum: 31 januari 2008

Opgave 1

a.



b. T maal zoveel input levert ook t maal zoveel output op. Er is dus sprake van constante schaalopbrengsten.

c. $MTSV_{21} = -dx_2/dx_1 = (3-1)/(5-1) = 1/2$.

Opgave 2

a. Er geldt: $C(tw_1, tw_2, y) = (tw_1)^{1/3}(tw_2)^{2/3}y^{1/3} = tw_1^{1/3}w_2^{2/3}y^{1/3} = t \cdot C(w_1, w_2, y)$

De kostenfunctie is homogeen van de eerste graad in w_1 en w_2.

Interpretatie: wanneer de prijzen van beide inputs stijgen of dalen met hetzelfde percentage, stijgen of dalen de kosten ook met dit percentage.

De verklaring daarvan is, dat het optimum ligt in het raakpunt van de isoquant met de isokostenlijn en de helling van deze lijn wordt bepaald door de prijsverhouding en niet door de prijsniveaus van de inputs. Zie figuur 3.7 in de syllabus.

b. De gemiddelde kosten zijn: $C(w_1, w_2, y)/y = w_1^{1/3}w_2^{2/3}y^{1/3}/y = w_1^{1/3}w_2^{2/3}y^{-2/3}$

c. $\max\limits_{x_1, x_2} Py - C(w_1, w_2, y) = Py - w_1^{1/3}w_2^{2/3}y^{1/3}$

Eerste-orde voorwaarde: $d\left(Py - w_1^{1/3}w_2^{2/3}y^{1/3}\right)/dy = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{3}w_1^{1/3}w_2^{2/3}y^{-2/3}$

De aanbodfunctie is dus: $y = 3^{-3/2}w_1^{1/2}w_2P^{-3/2}$

Opgave 3

a. De hessematrix is $\begin{bmatrix} -2x_1^{-3/2} & 0 \\ 0 & -0{,}5x_2^{-3/2} \end{bmatrix}$

$h_{1,1} < 0$ en de determinant is $x_1^{-3/2}x_2^{-3/2} > 0$. De hessematrix is dus negatief definiet, zodat de nutsfunctie concaaf is en daarom ook concaaf contoured.

b. $\min_{x_1,x_2} \; p_1x_1 + p_2x_2$ o.d.v. $8\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2} = u$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{matrix} p_1 = 4/\sqrt{x_1} \\ p_2 = 1/\sqrt{x_2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{p_1}{p_2} = 4\dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} \Rightarrow \sqrt{x_1} = 4\dfrac{p_2}{p_1}\sqrt{x_2}$

Met de voorwaarde volgt dan: $32\dfrac{p_2}{p_1}\sqrt{x_2} + 2\sqrt{x_2} = u \Rightarrow 2\left(\dfrac{16p_2 + p_1}{p_1}\right)\sqrt{x_2} = u$

De voorwaardelijke vraagfunctie van x_2 is dus: $x_2 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{p_1}{16p_2 + p_1}\right)^2 u^2$

Deze geeft de optimale x_2 bij een gegeven prijzen van de inputs en een gegeven productie.

c. In het evenwicht is de helling van de transformatiecurve gelijk aan die van de indifferentiecurve; de prijsverhouding is gelijk aan deze helling.

De hellingshoek van de indifferentiecurve is: $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{\partial\left(8\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}\right)/\partial x_1}{\partial\left(8\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}\right)/\partial x_2} = -4\dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$

De hellingshoek van de transformatiecurve is: $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{\partial\left(x_1^2 + 2x_2^2\right)/\partial x_1}{\partial\left(x_1^2 + 2x_2^2\right)/\partial x_2} = -\dfrac{x_1}{2x_2}$

Evenwicht: $-4\dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = -\dfrac{x_1}{2x_2} \Rightarrow 8\left(\sqrt{x_2}\right)^3 = \left(\sqrt{x_1}\right)^3 \Rightarrow 2\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} \Rightarrow x_1 = 4x_2$

Alternatief: $\max_{x_1,x_2} \; 8\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ o.d.v. $x_1^2 + 2x_2^2 = 600$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{matrix} 4/\sqrt{x_1} = 2x_1 \\ 1/\sqrt{x_2} = 4x_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4\dfrac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \dfrac{x_1}{2x_2} \Rightarrow x_1 = 4x_2$

De prijsverhouding is: $p_1/p_2 = x_1/(2x_2) = 4x_2/(2x_2) = 2$

of: $p_1/p_2 = 4\sqrt{x_2}/\sqrt{x_1} = 4\sqrt{x_2}/2\sqrt{x_2} = 2$

Opgave 4

a. Winst: $PY - C(Y) = (440 - 2Y)Y - (5000 + 2Y^2)$.

Eerste orde voorwaarde: $440 - 4Y - 4Y = 0 \Rightarrow Y = 55$.

N.B. $P = 440 - 2\times55 = 330$, dus de winst is: $18.150 - 11.050 = 7100 > 0$

b. De producenten maximaliseren hun gezamenlijke winst:

$\left(440 - 2(y_1 + y_2)\right)(y_1 + y_2) - \left(5000 + 2y_1^2 + 7500 + 100y_2\right)$

De eerste-orde voorwaarden zijn:

$440 - 4y_1 - 2y_2 - 2y_2 - 4y_1 = 0$ en $440 - 2y_1 - 2y_1 - 4y_2 - 100 = 0$

Hieruit volgt: $4y_1 = 100 \Rightarrow y_1 = 25 \Rightarrow 440 - 100 - 4y_2 - 100 = 0 \Rightarrow y_2 = 60$.

$P = 440 - 2\times85 = 270$

$\Rightarrow$ winst$_1 = 6750 - 6250 = 500 > 0$ en winst$_2 = 16.200 - 13.500 = 2700 > 0$

Opgave 5

a. De productie is: $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 1200 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1600 \\ 2100 \end{bmatrix}$

De technische coëfficiënten m.b.t. de intermediaire leveringen zijn:

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - \left((\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{I} - \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0{,}9 & -0{,}4 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Dan volgt de input-output tabel:

	Bedrijfstak 1	Bedrijfstak 2	Finaal	Totaal
Bedrijfstak 1	160	840	600	1600
Bedrijfstak 2	480	420	1200	2100
Arbeid	576	630		1206
Kapitaal	384	210		594
Totaal	1600	2100	1800	

b. De hoeveelheid arbeid per eenheid finale leveringen van sector 2 is:
- in situatie 1: 0,69, zie $\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$;
- in situatie 2: 2,15625, zie $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$.

In situatie 2 is de hoeveelheid arbeid groter, omdat naast de intermediaire leveringen van de bedrijfstakken ook intermediaire leveringen van consumptiegoederen nodig zijn t.b.v. de gezinnen. Hierdoor stijgt de benodigde hoeveelheid arbeid.

Opgave 6

a. De contante waarde van de opbrengsten is: $\frac{6000}{1{,}10} + \frac{7000}{1{,}10^2} + \frac{10.000}{1{,}10^3} = 18.752{,}82$

De contante waarde is kleiner dan de investering en daarom wordt het project niet uitgevoerd.

b. Omdat de contante waarde bij 10% rente kleiner is dan de investering is de interne rentevoet kleiner dan 10%.

Opgave 7

$200 - 1{,}7P_t = Y_{V,t} = Y_{A,t} = -10 + 2{,}5(P_{t-1} + 0{,}5(P_{t-1} - P_{t-2})) = -10 + 3{,}75P_{t-1} - 1{,}25P_{t-1}$

$\Rightarrow 1{,}7P_t + 3{,}75P_{t-1} - 1{,}25P_{t-1} = 210$

Karakteristieke vergelijking: $1{,}7k^2 + 3{,}75k - 1{,}25 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1/(3{,}4)$ en $-2{,}5$.

Oplossing: $P_t = C_1(1/3{,}4)^t + C_2(-2{,}5)^t$ + particuliere oplossing

Na een verstoring van het evenwicht ontstaat een alternerende ontwikkeling en de prijs gaat dan niet naar een nieuw evenwicht.