Faculteit Management en Bestuur

Vakgroep LEGS

UNIVERSITEIT TWENTE.

Kenmerk: MB.LEGS10.D009
Datum: 30 november 2011

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Institutenweg 25 - T-225

STANDAARDUITWERKING

Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (158061)
Datum: 28 januari 2010

Opgave 1

a. $y(t\cdot x) = 8(t\cdot x_1)^{0,25}(t\cdot x_2)^{0,5} = t^{0,75}8x_1^{0,25}x_2^{0,5} = t^{0,75}y(x) < t\cdot y(x)$ voor t >1,
dus er zijn afnemende schaalopbrengsten.

b. $MTSV_{12} = -\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{\partial y/\partial x_2}{\partial y/\partial x_1} = \dfrac{4x_1^{0,25}x_2^{-0,5}}{2x_1^{-0,75}x_2^{0,5}} = 2\dfrac{x_1}{x_2}$

c. Voor de isoquant van y = 80 geldt: $8x_1^{0,25}x_2^{0,5} = 80$, zodat de vergelijking is: $x_2 = 100x_1^{-0,5}$.

d. $\min\limits_{x_1,x_2} \; w_1x_1 + w_2x_2$ o.d.v. $8x_1^{0,25}x_2^{0,5} = y$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda 2x_1^{-0,75}x_2^{0,5} \\ w_2 &= \lambda 4x_1^{0,25}x_2^{-0,5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \dfrac{w_1}{w_2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = 2\dfrac{w_1}{w_2}x_1$

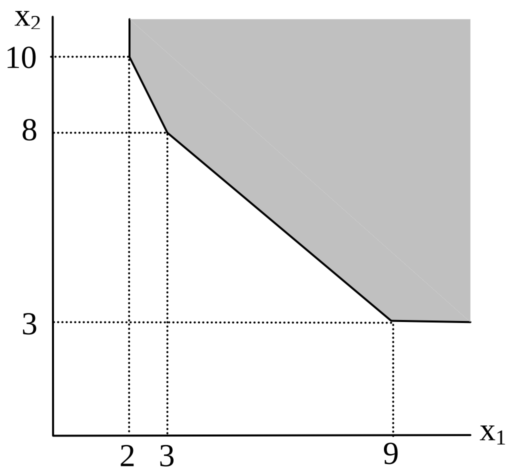
Met de voorwaarde volgt dan: $8x_1^{0,25}2^{0,5}w_1^{0,5}w_2^{-0,5}x_1^{0,5} = y \Rightarrow x_1^{0,75} = 2^{-3,5}w_1^{-0,5}w_2^{0,5}y$

$\Rightarrow x_1 = 2^{-14/3}w_1^{-2/3}w_2^{2/3}y \Rightarrow x_2 = 2^{-11/3}w_1^{1/3}w_2^{-1/3}y$

Dit zijn de voorwaardelijke vraagfuncties; zij geven de inputs die bij gegeven prijzen en productie de laagste kosten opleveren.

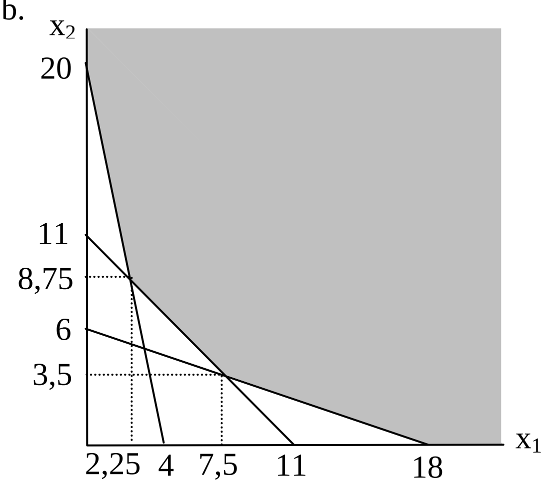
Opgave 2

a.



Het grijze vlak (inclusief de rand links en onder) geeft het inwendige van de verzameling van vereiste inputs (voor zover zichtbaar in de figuur).

b.



Het grijze vlak (inclusief de rand links en onder) geeft het uitwendige van de verzameling van vereiste inputs (voor zover zichtbaar in de figuur).
De vergelijkingen van de lijnen zijn:
$x_2 = -5x_1 + 20$
$x_2 = -x_1 + 11$
$x_2 = -(1/3)x_1 + 6$

c. Bij $w_1 = 4$ en $w_2 = 2$ kost $x_1 = 4$ en $x_2 = 6$: $16 + 12 = 28$.
De combinatie $x_1 = 2$ en $x_2 = 10$ en de combinatie $x_1 = 3$ en $x_2 = 8$ kosten ook 28 en de combinatie $x_1 = 9$ en $x_2 = 3$ kost 42.
De producent kiest dus (een van de) goedkoopste combinatie(s) en voldoet daarmee aan het zwakke axioma van kostenminimalisatie: $\mathbf{w^*}^T\mathbf{x^*} \le \mathbf{w^*}^T\mathbf{x}$.

Opgave 3

a. De kostenfunctie is: $p_1h_1 + p_2h_2 = \dfrac{p_1p_2^2}{(p_1+p_2)^2}u^2 + \dfrac{p_1^2p_2}{(p_1+p_2)^2}u^2 = \dfrac{p_1p_2}{p_1+p_2}u^2$

b. De hessematrix is $\dfrac{2u^2}{(p_1+p_2)^3}\begin{bmatrix} -p_2^2 & p_1p_2 \\ p_1p_2 & -p_1^2 \end{bmatrix}$

$h_{1,1} < 0$ en de determinant is nul. De hessematrix is dus negatief semidefiniet, zodat de kostenfunctie concaaf is.
Zie syllabus pag. 65. Als de ondernemer de inputs aanpast aan veranderingen van de prijzen, zijn de (minimale) kosten lager dan wanneer de inputs niet worden aangepast.

c. In de uitgangssituatie geldt: $p_1 = 1$, $p_2 = 1$ en $m = 450 \Rightarrow x_1 = 225$ en $x_2 = 225$.
Bij $u = 30$ volgt met $p_1 = 2$, $p_2 = 1$: $x_1 = 100$ en $x_2 = 400$;
Het substitutie-effect is dus: $\Delta x_1 = -125$ en $\Delta x_2 = 175$.
In de nieuwe situatie geldt: $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ en $m = 450 \Rightarrow x_1 = 75$ en $x_2 = 300$;
Het inkomenseffect is dus: $\Delta x_1 = -25$ en $\Delta x_2 = -100$.

Opgave 4

In het evenwicht geldt: $\dfrac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = -\dfrac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{\text{consument}} = \dfrac{p_1}{p_2} = -\dfrac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{\text{producent}} = \dfrac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}$

Hierin is f het linkerlid van de transformatiecurve.

Dit geeft: $\dfrac{2x_1x_2^3}{3x_1^2x_2^2} = \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{2x_1}{12x_2} \Rightarrow 4x_2^2 = x_1^2$

Met de transformatiecurve volgt: $4x_2^2 + 6x_2^2 = 10x_2^2 = 160 \Rightarrow x_2 = 4$ en $x_1 = 8$,
Dus $p_1/p_2 = 16/48 = 1/3$ (= 1024/3072)

Alternatieve uitwerking opgave 4:

$$\max_{x_1,x_2} \; x_1^2 x_2^3 \text{ o.d.v. } x_1^2 + 6x_2^2 = 160$$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{array}{l} 2x_1x_2^3 = \lambda 2x_1 \\ 3x_1^2x_2^2 = \lambda 12x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{6}\frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_1^2 = 4x_2^2$

Met de voorwaarde volgt dan: $4x_2^2 + 6x_2^2 = 10x_2^2 = 160 \Rightarrow x_2 = 4$ en $x_1 = 8$

De prijsverhouding is:

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = -\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\text{consument}} = \frac{p_1}{p_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2} = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{16}{48} = \frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{1024}{3072} = \frac{1}{3}$$

Opgave 5

a. De ondernemers maximaliseren hun gezamenlijke winst:

$$(300 - (y_1 + y_2))(y_1 + y_2) - (6000 + y_1^2) - (6000 + y_2^2)$$

De eerste-orde voorwaarden zijn: $300 - 2y_1 - 2y_2 = 2y_1$ en $300 - 2y_2 - 2y_1 = 2y_2$

Hieruit volgt: $y_1 = y_2$ en $300 - 4y_1 = 2y_1 \Rightarrow y_1 = 50 = y_2$

Met $P = 300 - 100 = 200$ volgt de winst van iedere ondernemer: $10.000 - 8500 = 1500 > 0$

b. De eerste producent maximaliseert: $(300 - (y_1 + y_2))y_1 - (6000 + y_1^2)$

De eerste-orde voorwaarde is: $300 - 2y_1 - y_2 = 2y_1$

$\Rightarrow y_1 = 75 - 0{,}25y_2$; dit is de reactiefunctie van de eerste ondernemer.

Analoog volgt voor de reactiefunctie van de tweede ondernemer: $y_2 = 75 - 0{,}25y_1$.

c. Substitutie van de vergelijking voor y_2 in die van y_1 geeft:

$y_{1,t} = 75 - 0{,}25(75 - 0{,}25y_{1,t-2}) = 56{,}25 + (1/16)y_{1,t-2} \Rightarrow y_{1,t} - (1/16)y_{1,t-2} = 56{,}25$

karakteristieke vergelijking: $k^2 - (1/16) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 0{,}25$

oplossing homogeen deel: $y_{1,t} = C_1(0{,}25)^t + C_2(-0{,}25)^t$

Er ontstaat een alternerende beweging en $y_{1,t}$ gaat naar een evenwicht ($y_1 = 60$).

N.B. Voor y_2 geldt hetzelfde. Men kan dit op analoge wijze afleiden, maar uit de vergelijking voor $y_{2,t}$ volgt ook direct dat de ontwikkeling van y_2 dezelfde karakteristieken heeft als die van y_1: $y_{2,t} = -0{,}25C_1(0{,}25)^t - 0{,}25C_2(-0{,}25)^t + \text{const.}$

Opgave 6

a. De matrix A kan men als volgt berekenen:

$$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & 0{,}48 \\ 0{,}5 & 1{,}60 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0{,}80 & -0{,}24 \\ -0{,}25 & 0{,}70 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}20 & 0{,}24 \\ 0{,}25 & 0{,}30 \end{bmatrix}$$

Met $X_1 = 1000$ en $X_2 = 1500$ kan men dan de volgende input-output tabel opstellen.

	Bedrijfstak 1	Bedrijfstak 2	Finaal	Totaal
Bedrijfstak 1	200	360	440	1000
Bedrijfstak 2	250	450	800	1500
Import	125	150	–	275
Arbeid	250	300	–	550
Kapitaal	175	240	–	415
Totaal	1000	1500	1240	3740

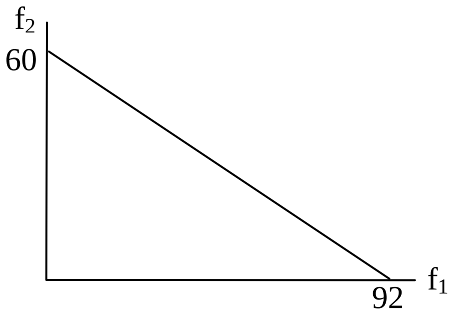
De finale leveringen zijn bij iedere bedrijfstak gelijk aan het verschil tussen de productie en de intermediaire leveringen (van deze bedrijfstak).

b. $\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}0{,}125 & 0{,}10\\ 0{,}250 & 0{,}20\\ 0{,}175 & 0{,}16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1{,}4 & 0{,}48\\ 0{,}5 & 1{,}60\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}225 & 0{,}22\\ 0{,}450 & 0{,}44\\ 0{,}325 & 0{,}34\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}p_1\\ p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}225 & 0{,}45 & 0{,}325\\ 0{,}220 & 0{,}44 & 0{,}340\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{\text{invoer}}\\ p_{\text{arbeid}}\\ p_{\text{kapitaal}}\end{bmatrix}$$

Als de prijs van de invoer stijgt met 10%, stijgt de prijs van de productie van de tweede bedrijfstak met 2,2%.

c.



De relatie tussen de finale leveringen en de CO_2 uitstoot volgt uit:

$$[2{,}5 \quad 5](\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}=[2{,}5 \quad 5]\begin{bmatrix}1{,}4 & 0{,}48\\ 0{,}5 & 1{,}60\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\end{bmatrix}$$

Dit geeft: $6f_1 + 9{,}2f_2 = 552$.

De snijpunten met de assen zijn: $f_1 = 92$ en $f_2 = 60$.

Opgave 7

a. $dY/Y = 0{,}01dt \Rightarrow \ln Y = 0{,}01t + \ln(C) \Rightarrow Y_t = Ce^{0{,}01t}$

$t = 0$ in 2009 $\Rightarrow 575 = Y_{2009} = C \Rightarrow Y_t = 575e^{0{,}01t}$

alternatief: karakteristieke vergelijking: $\lambda - 0{,}01 = 0 \Rightarrow \lambda = 0{,}01$ en: $Y_t = Y_{2009}e^{0{,}01t}$.

b. $Y_0e^{0{,}01T} = Y_T = 1{,}05Y_0 \Rightarrow 0{,}01T = \ln(1{,}05) = 0{,}04879 \Rightarrow T = 4{,}9$, dus na 4 jaar en 10 à 11 maanden is het niveau van 2008 weer bereikt.