Faculteit Management en Bestuur
Vakgroep LEGS

UNIVERSITEIT TWENTE.

Kenmerk: MB.LEGS11.D009
Datum: 30 november 2011

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Ravelijn - RA 2276

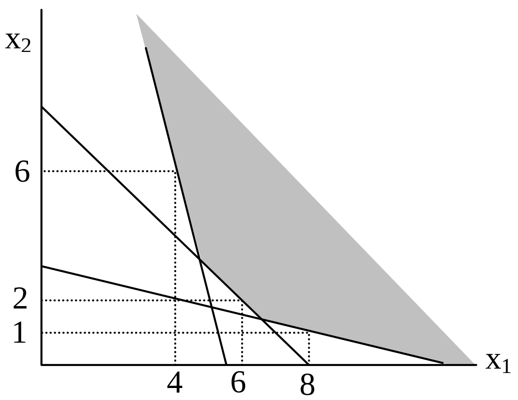
STANDAARDUITWERKING
Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (191580612)
Datum: 27 januari 2011

Opgave 1

a. x_1 en /of x_2 (absoluut) groter en / of y kleiner dan één
b.v. [–5, –7, +1/2], [–7, –3, +1/2], [–9, –2, +1/2], negatieve inputs en positieve output.

b. De som van twee productievectoren, b.v. [–10, –8, +2], [–12, –7, +2], [–14, –3, +2].

c.



Het grijze gebied is het uitwendige. De lijnen die de grens vormen lopen door de punten die in de opgave zijn gegeven en de hellingen worden bepaald door de prijsverhouding p_1/p_2.
De vergelijkingen van deze lijnen zijn:
$x_2 = 22 - 4x_1$
$x_2 = 8 - x_1$
$x_2 = 3 - 0{,}25x_1$

d. $MTSV_{21} = -(6-2)/(4-6) = 2$

Opgave 2

a. Als de vaste waarde van x_3 gelijk is aan x_3^*, is het optimalisatieprobleem:

$$\min_{x_1, x_2} \; w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3^* \text{ o.d.v. } y = x_1^{0,5}x_2^{0,5} + x_3^*$$

Eerste-orde voorwaarden: $$\left.\begin{aligned} w_1 &= \lambda 0{,}5_1^{-0,5}x_2^{0,5} \\ w_2 &= \lambda 0{,}5x_1^{0,5}x_2^{-0,5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \frac{w_1}{w_2}x_1$$

Met de voorwaarde volgt dan: $y = x_1^{0,5}w_1^{0,5}w_2^{-0,5}x_1^{0,5} + x_3^*$

$\Rightarrow x_1 = (y - x_3^*)w_1^{-0,5}w_2^{0,5}$ en $x_2 = (y - x_3^*)w_1^{0,5}w_2^{-0,5}$

De kostenfunctie is: $c(y, w_1, w_2, w_3, x_3^*) = 2(y - x_3^*)w_1^{0,5}w_2^{0,5} + w_3x_3^*$

b. Als x_3 variabel is geldt $x_3 = 0$ met $y = x_1^{0,5}x_2^{0,5}$ of $x_3 = y$ met $x_1 = x_2 = 0$, analoog aan voorbeeld 3.4 in de syllabus.
De kosten van beide situaties zijn respectievelijk $2y \cdot w_1^{0,5}w_2^{0,5}$ (zie a.) en w_3y.
Als $2w_1^{0,5}w_2^{0,5} < w_3$ is $x_3 = 0$ optimaal en als $2w_1^{0,5}w_2^{0,5} > w_3$ is $x_3 = y$ optimaal. Bij de gelijkheid $2w_1^{0,5}w_2^{0,5} = w_3$ is iedere waarde $0 \leq x_3 \leq y$ optimaal.

Opgave 3

a. De hessematrix is $\begin{bmatrix} -x_1^{-2} & 0 \\ 0 & -2x_2^{-2} \end{bmatrix}$

   $h_{1,1} < 0$ en de determinant is $2x_1^{-2}x_2^{-2} > 0$, dus de hessematrix is dus negatief semidefiniet en de nutsfunctie is concaaf en daarmee ook 'concaaf contoured'.

b. $\max\limits_{x_1, x_2} \ln(x_1) + 2\ln(x_2)$ o.d.v. $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

   Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{aligned} 1/x_1 &= \lambda p_1 \\ 2/x_2 &= \lambda p_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p_2x_2 = 2p_1x_1$

   Met de voorwaarde volgt dan: $3p_1x_1 = m \Rightarrow x_1 = (1/3)m/p_1$ en $x_2 = (2/3)m/p_2$

   De indirecte nutsfunctie is:

   $\nu(p_1, p_2, m) = \ln((1/3)m/p_1) + \ln((2/3)m/p_2) = \ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln(m) - \ln(p_1) - \ln(p_2)$.

   Deze geeft het maximale nut dat de consument kan bereiken bij gegeven inkomen en prijzen.

Opgave 4

$\max\limits_{c(0), c(T)} \ln\big(c(0)\big) + \ln\big(c(T)\big)$ o.d.v. $c(T) = y(T) + 1{,}04[50.000 - c(0)]$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{aligned} 1/c(0) &= \lambda 1{,}04 \\ 1/c(T) &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow c(T) = 1{,}04c(0)$

Met de voorwaarde volgt: $1{,}04c(0) = y(T) + 52.000 - 1{,}04c(0) \Rightarrow c(0) = (y(T) + 52.000)/2{,}08$

De consument leent geld als $c(0) > 50.000 \Rightarrow y(T) + 52.000 > 104.000 \Rightarrow y(T) > 52.000$.

Opgave 5

In de onzekere situatie is het verwachte nut 0,75ln(20.000) + 0,25ln(30.000) = 10,004854.

Dit nut wordt bereikt bij een inkomen van €22.133,64, zodat de consument bereid is om maximaal €22.500 − €22.133,64 = €366,36 te betalen.

Opgave 6

a. De inverse vraagfunctie is: $P = 192 - 2Y$

   Dit geeft voor de winst: $(192 - 2Y)Y - (1000 + 4Y^2)$

   De optimale productie volgt uit: $192 - 4Y - 8Y = 0 \Rightarrow Y = 16$

   Dan is $P = 160$ en winst $= 2560 - 2024 = 536 > 0$.

b. Voor de tweede ondernemer geldt:

   $\text{winst}_2 = Py_2 - C_2(y_2) = \big(192 - 2(y_1 + y_2)\big)y_2 - \big(1000 + 4y_2^2\big)$

   $d(\text{winst}_2)/dy_2 = 0 \Rightarrow 192 - 2y_1 - 4y_2 - 8y_2 = 0 \Rightarrow$ reactiefunctie: $y_2 = 16 - (1/6)y_1$

   Voor de eerste ondernemer geldt:

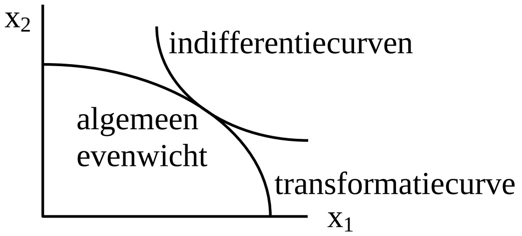
   $\text{winst}_1 = Py_1 - C_1(y_1) = \big(192 - 2(y_1 + 16 - \tfrac{1}{6}y_1)\big)y_1 - \big(750 + 5y_1^2\big)$

   $d(\text{winst}_1)/dy_1 = 0 \Rightarrow 192 - (10/3)y_1 - 32 - 10y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = 12$ en $y_2 = 14 \Rightarrow P = 140$

   $\text{winst}_1 = 1680 - 1470 = 210 > 0$ en $\text{winst}_2 = 1960 - 1784 = 176 > 0$

c. Alleen de combinatie $y_1 = 12$ en $y_2 = 14$ is niet Pareto-efficiënt; want bij $y_1 = 10$ en $y_2 = 13$ is de winst van de tweede ondernemer hoger en die van de eerste gelijk. De andere drie situaties ($y_1 = 12$ en $y_2 = 13$; $y_1 = 10$ en $y_2 = 14$; $y_1 = 10$ en $y_2 = 13$) zijn alle Pareto-efficiënt: dan gaat een stijging van de winst van de een ten koste van de winst van de ander.

d.



Het algemeen evenwicht is het raakpunt van de transformatiecurve en de indifferentiecurve. De winst van de producent is maximaal en het nut van de consument is ook maximaal. Bovendien kan geen van beiden erop vooruit gaan.

Opgave 7

a. De matrices van technische coëfficiënten zijn:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Het prijzenmodel is: $\mathbf{p} = [\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]^T\mathbf{w}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 \\ 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}2 & 4/15 \\ 0{,}4 & 1{,}2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}56 \\ 0{,}26 & 0{,}28 \\ 0{,}22 & 0{,}16 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0{,}52 & 0{,}26 & 0{,}22 \\ 0{,}56 & 0{,}28 & 0{,}16 \end{bmatrix}\mathbf{w}$$

Als de prijs van de invoer stijgt met 10%, stijgt de prijs in de eerste bedrijfstak met 5,2% en die in de tweede bedrijfstak met 5,6%.

b. Voor de uitstoot per bedrijfstak geldt: $CO_2 = [3\ 6](\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{F}$

$$CO_2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}2 & 4/15 \\ 0{,}4 & 1{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 6f_1 + 8f_2$$

De uitstoot is $3\times380 + 6\times460 = 3900 = 6\times250 + 8\times300$ en moet dus met 400 worden teruggebracht. Dan moet f_2 dalen met 50 tot 250: $\Delta CO_2 = -400 = 8\Delta f_2 \Rightarrow \Delta f_2 = -50$.

Opgave 8

a. $P_t = P_{t-1} = P_{t-2} \Rightarrow 300 - 2P = -30 + 6P \Rightarrow P = 41{,}25$

b. $300 - 2P_t - P_t + P_{t-1} = -30 + 6P_{t-1} + 3P_{t-1} - 3P_{t-2} \Rightarrow 3P_t + 8P_{t-1} - 3P_{t-2} = 330$

Karakteristieke vergelijking: $3k^2 + 8k - 3 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 1/3$ en -3

Oplossing: $P_t = C_1(1/3)^t + C_2(-3)^t + 41{,}25$

Na een verstoring van het evenwicht ontstaat een alternerende ontwikkeling en de markt gaat niet naar een (nieuw) evenwicht.