Faculteit Management en Bestuur

Vakgroep LEGS

UNIVERSITEIT TWENTE.

Kenmerk: MB.LEGS11.D033
Datum: 30 november 2011

Docent: L.B.M. Dieben
email L.B.M.Dieben@utwente.nl; tel. 053-489-3916; Ravelijn - RA 2276

STANDAARDUITWERKING
Tentamen: Inleiding Wiskundige Economie (191580612)
Datum: 8 april 2011

Opgave 1

a. $y(t\mathbf{x}) = \left(\sqrt{tx_1} + \sqrt{tx_2}\right)^2 = t\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2 = t \cdot y(\mathbf{x})$, dus er zijn constante schaalopbrengsten

b. $dy/dx_1 = 2\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}} = 1 + \sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$

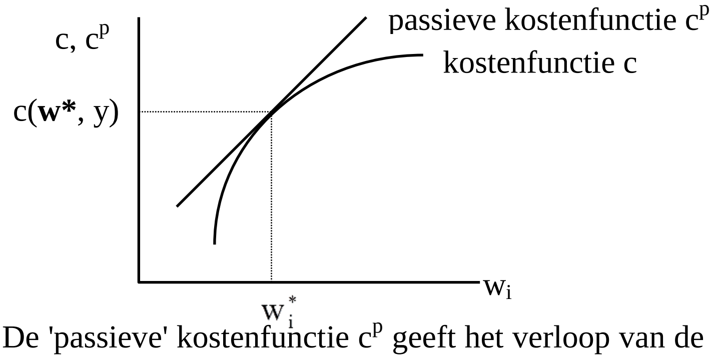
c. $MTSV_{21} = -\dfrac{dx_2}{dx_1} = \dfrac{\partial y/\partial x_1}{\partial y/\partial x_2} = \dfrac{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)/\sqrt{x_1}}{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)/\sqrt{x_2}} = \sqrt{\dfrac{x_2}{x_1}}$

$$\frac{1}{\sigma_{21}} = \frac{x_2/x_1}{MTSV_{21}}\frac{dMTSV_{21}}{d(x_2/x_1)} = \frac{x_2/x_1}{\sqrt{x_2/x_1}}\frac{1}{2\sqrt{x_2/x_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma_{21} = 2$$

Opgave 2

a. De hessematrix is $2^{1/3} \cdot 3^{-1} y^{4/3} \begin{bmatrix} -w_1^{-4/3}w_2^{1/3} & w_1^{-1/3}w_2^{-2/3} \\ w_1^{-1/3}w_2^{-2/3} & -w_1^{2/3}w_2^{-5/3} \end{bmatrix}$

$h_{1,1} < 0$ en de determinant is 0, dus de kostenfunctie is negatief semidefiniet en de kostenfunctie is concaaf en daarmee ook 'concaaf contoured'.
De economische interpretatie volgt uit onderstaande figuur (figuur 3.8 in de syllabus).



De 'passieve' kostenfunctie c^p geeft het verloop van de kosten als de hoeveelheden van alle inputs constant blijven. De kostenfunctie geeft de minimale kosten, wanneer de inputs worden aangepast aan veranderingen van de inputprijzen. Omdat de kostenfunctie concaaf is, zijn deze minimale kosten altijd kleiner dan of gelijk aan de kosten zonder aanpassing.

b. $\max_y \; Py - c(\mathbf{w}, y) = Py - 3 \cdot 2^{-2/3} w_1^{2/3} w_2^{1/3} y^{4/3}$

Eerste orde voorwaarde: $P - 4 \cdot 2^{-2/3} w_1^{2/3} w_2^{1/3} y^{1/3} = 0 \Rightarrow y = 2^{-4} w_1^{-2} w_2^{-1} P^3$

Opgave 3

a. $\max_{x_1,x_2} -\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}$ o.d.v. $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

Eerste-orde voorwaarden: $\left.\begin{array}{l} x_1^{-2} = \lambda p_1 \\ x_2^{-2} = \lambda p_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{p_1}{p_2} \Rightarrow x_2 = x_1\sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$

Met de voorwaarde volgt dan: $p_1x_1 + p_1^{1/2}p_2^{1/2}x_1 = m \Rightarrow x_1 = \frac{m}{p_1 + p_1^{1/2}p_2^{1/2}}$

Dit is de vraagfunctie van x_1; deze geeft de optimale x_1 bij gegeven inkomen en prijzen.

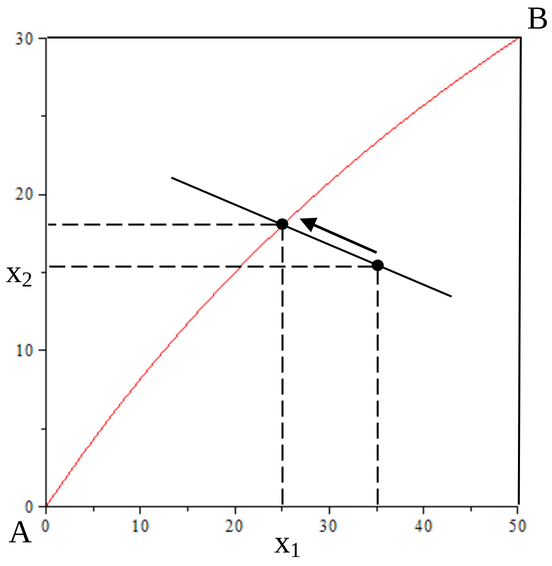
b. Met de waarden van p en x kan men het inkomen ($p_1x_1 + p_2x_2$) en het nut berekenen:

	p_1	p_2	x_1	x_2	inkomen	nut
Situatie 1	4	1	120	240	720	–1/80
Situatie 2	4	4	160	160	1280	–1/80
Situatie 3	4	4	90	90	720	–1/45

In de situaties 1 en 2 is het nut gelijk en zijn de prijzen verschillend. Dan is er een verschuiving langs een indifferentiecurve en die geeft het substitutie-effect: $\Delta x_1 = 40$ en $\Delta x_2 = -80$.

In situatie 3 is het inkomen gelijk aan dat van situatie 1; er is dus geen inkomens-compensatie. Het nut is lager dan in de situaties 1 en 2, terwijl de prijzen gelijk zijn aan die in situatie 2. Het verschil tussen de situaties 2 en 3 geeft dus het inkomenseffect: $\Delta x_1 = -70$ en $\Delta x_2 = -70$.

Opgave 4



Zie de figuur hiernaast. Het evenwicht is het snijpunt van de contractcurve en de budgetlijn. De helling van de budgetlijn is $-p_1/p_2 = -1/5$ en deze lijn gaat door het punt $x_1 = 35$ en $x_2 = 16$ (met consument A linksonder).

De vergelijkingen van de budgetlijn is dan: $x_2 = -(1/5)x_1 + 23$.

Het snijpunt van contractcurve en budgetlijn volgt uit: $90x_1/(x_1 + 100) = -(1/5)x_1 + 23$.

$\Rightarrow 90x_1 = -0{,}2x_1^2 + 3x_1 + 2300$

$\Rightarrow 0{,}2x_1^2 + 87x_1 - 2300 = 0 \Rightarrow x_1 = 25$ en -460

Dus $x_{1A} = 25$ en $x_{2A} = 2250/125 = 18 = -5 + 23$

Opgave 5

a. De matrix van uitbetalingen heeft de volle rang en deze is 2, gelijk aan het aantal toestanden, dus de markt is volledig.

b. De kosten van de vectoren van uitbetalingen $u_1 = [1\ 0]$ en $u_2 = [0\ 1]$ zijn:

$$\mathbf{p}^T\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix}100 & 200\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}+30 & -10\end{bmatrix}$$

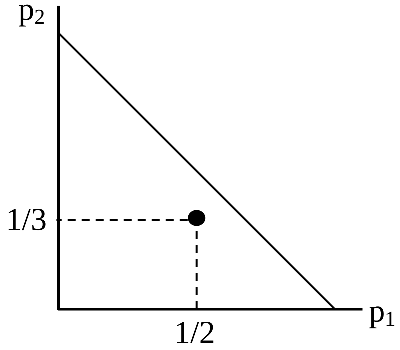
Omdat de kosten van u_2 negatief zijn, geeft de tweede kolom van $\mathbf{D}^{-1}$ een arbitragestrategie, namelijk: $\theta_1 = -0{,}3$ en $\theta_2 = 0{,}1$.

Opgave 6

a. Uit L_1 volgt de enkelvoudige loterij: $L'_1 = \{1/2\circ a_1 \wedge 1/3\circ a_2 \wedge 1/6\circ a_3\}$ en deze is gelijk aan die uit het gegeven van de opgave, zodat L_1 equivalent is met L.

Uit L_2 volgt de enkelvoudige loterij: $L'_2 = \{1/3\circ a_1 \wedge 1/3\circ a_2 \wedge 1/3\circ a_3\}$ en deze is niet gelijk aan die uit het gegeven van de opgave, zodat L_2 niet equivalent is met L.

b.



Opgave 7

a. Voor de eerste ondernemer geldt:

$winst_1 = p_1y_1 - C_1(y_1) = p_1(250 - 15p_1 + 10p_2) - (4000 + 6(250 - 15p_1 + 10p_2))$

$d(winst_1)/dp_1 = 0 \Rightarrow 250 - 30p_1 + 10p_2 + 90 = 0 \Rightarrow$ reactiefunctie: $p_1 = 34/3 + (1/3)p_2$

Voor de tweede ondernemer geldt:

$winst_2 = p_2y_2 - C_2(y_2) = p_2(90 - 5p_2 + 10p_1) - (4000 + 5(90 - 5p_2 + 10p_1))$

$d(winst_2)/dp_2 = 0 \Rightarrow 90 - 10p_2 + 10p_1 + 25 = 0 \Rightarrow$ reactiefunctie: $p_2 = 11{,}5 + p_1$

Oplossing: $p_1 = 34/3 + 11{,}5/3 + (1/3)p_1 \Rightarrow 2p_1 = 45{,}5 \Rightarrow p_1 = 22{,}75 \Rightarrow p_2 = 34{,}25$

$y_1 = 251{,}25$ en $y_2 = 146{,}25$; $winst_1 = 208{,}44 > 0$ en $winst_2 = 277{,}81 > 0$

b. $Y = 630 - 15P \Rightarrow P = 42 - (1/15)Y \Rightarrow winst = (42 - (1/15)Y)Y - (4000 + 6Y)$

$dwinst/dY = 0 \Rightarrow 42 - (2/15)Y - 6 = 0 \Rightarrow Y = 270 \Rightarrow P = 24$

Alternatief: $Y = 630 - 15P \Rightarrow winst = P(630 - 15P) - (4000 + 6(630 - 15P))$

$dwinst/dP = 0 \Rightarrow 630 - 30P + 90 = 0 \Rightarrow P = 24 \Rightarrow Y = 270$

$Winst = 6480 - 5620 = 860 > 0$

Opgave 8

a. De verandering van de productie volgt uit de matrix van gecumuleerde productiecoëfficiënten: $\Delta X_2 = 100\times0{,}32023 = 320{,}23$ in het standaardmodel en voor het model met inkomenseffecten $100\times1{,}6 = 1600$. De uitkomst in het laatste model is groter dan die in het eerste, omdat in het model met inkomenseffecten een toename van arbeid leidt tot een stijging van de consumptie. In het standaardmodel is dat niet het geval: daar is de consumptie een onderdeel van de finale leveringen en die zijn een gegeven.

b. Het directe inkomenseffect volgt uit de matrix van technische coëfficiënten. De technische coëfficiënt van arbeid in bedrijfstak 2 is $2200/4400 = 0{,}5$, zodat het directe inkomenseffect is: $100\times0{,}5 = 50$.
   Het totale multipliereffect volgt uit de matrix van gecumuleerde productiecoëfficiënten in het model met inkomenseffecten; dit is: $100\times1{,}98 = 198$.

Opgave 9

$dP/dt = 50 - 1{,}5P - P - 0{,}5dP/dt + 10 \Rightarrow 1{,}5dP/dt + 2{,}5P = 60$

Oplossing homogene vergelijking: $dP/P = (5/3)dt \Rightarrow \ln P = -(5/3)t + \ln C \Rightarrow P = Ce^{-(5/3)t}$

Na een verstoring van het evenwicht ontstaat een monotone ontwikkeling en de markt gaat naar een (nieuw) evenwicht.