Universiteit Twente
de ondernemende universiteit

TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA (152120) 4 april 2007

-) alle antwoorden dienen gemotiveerd te zijn
-) het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan
-) opgave 4 kent twee versies, één voor TW en één voor TN/CT

1. Gegeven is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ van vergelijkingen met

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -12 & k \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

a) Los het stelsel op in het geval k=2
b) Voor welke waarde(n) van k heeft het stelsel geen oplossingen?
c) Bereken k in het geval dat het stelsel vele oplossingen heeft. Geef deze oplossingen in parametervorm.

2. Gegeven is de lineaire transformatie

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$$

a) Bepaal de matrix [T] van deze transformatie.
b) Is T op ('onto')? Is T 1-1 ('one to one')? Bestaat de inverse van [T] ?
c) De lijn l met parametervoorstelling $\mathbf{x} = (1 + t, t, t)$ wordt door T getransformeerd in een lijn m. Geef de parametervoorstelling van m.

3. a) Bereken de determinant van

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Bewijs, of geef een tegenvoorbeeld, van de volgende gelijkheid voor matrices:

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

Z.O.Z.

4. [TN/CT]

Gegeven zijn de matrices en

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Toon aan dat A en B rij-equivalent zijn.
b) Geef een basis voor de kolomruimte Col(A) van A.
c) Bereken de dimensie van de nulruimte Nul(A) van A.

4. [TW]

a) Formuleer voor een matrix A één stelling over Rang(A) en Dim(Nul(A)).
b) Gegeven is dat de oplossingsruimte van het stelsel $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases}$

wordt gegeven door Span ((c_1, c_2, c_3, c_4) , (d_1, d_2, d_3, d_4)).

bewijs dat de oplossingsruimte van het stelsel $\begin{cases} c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 = 0 \\ d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3 + d_4x_4 = 0 \end{cases}$

wordt gegeven door Span ((a_1, a_2, a_3, a_4) , (b_1, b_2, b_3, b_4)).

c) Bewijs dat voor een matrix A geldt : Rijrang(A) = Kolomrang(A).

5. Gegeven is de matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$

a) Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren van A.
b) Bepaal de oplossing van het discreet dynamisch systeem $\mathbf{x}(k+1) = A\,\mathbf{x}(k)$
c) Welke asymptoot heeft de trajectorie met willekeurig startpunt $\mathbf{x}(0)$?

Normering

			TN/CT	TW	
1. a) 3	**2. a)** 2	**3. a)** 4	**4. a)** 3	**4. a)** 2	**5. a)** 4
b) 2	**b)** 3	**b)** 2	**b)** 2	**b)** 3	**b)** 2
c) 2	**c)** 2		**c)** 2	**c)** 2	**c)** 3

Totaal : 36 + 4 = 40 punten.