TENTAMEN LINEAIRE ALGEBRA voor TW (152121)
dinsdag 6 november 2007 , 09:00 – 12:00 uur

- alle antwoorden dienen gemotiveerd te zijn voor volledige puntentoekenning
- het gebruik van een rekenmachine ter controle van antwoorden is toegestaan

1. a) Los het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ van vergelijkingen op met als coëfficiëntenmatrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Bepaal een matrix B en een vector **b** zodat de oplossingsruimte van $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ in parametervoorstelling wordt gegeven door $\mathbf{x} = (1+2t , -t , 1-t , t , 1)$

2. Gegeven zijn twee lineaire afbeeldingen, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
De bijbehorende matrices zijn

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad [S] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Bepaal $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ en $S\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

b) Is T 1-1-duidig (one-to-one) ? Is S op (onto) ? Is $S \circ T$ 1-1-duidig ?
c) Bereken de determinanten det($[T][S]$) en det($[S][T]$)

3. a) Bereken de inverse van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

b) Bewijs : als A een inverteerbare 3×3 – bovendriehoeksmatrix is, dan is de inverse van A ook een inverteerbare 3×3 – bovendriehoeksmatrix.
(aanwijzing : A is bovendriehoeks als A(i,j) = 0 voor i > j)

4. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Bepaal de rang van A
b) Geef een basis voor de kolomruimte Col(A)
c) Geef een voorbeeld van een 3×3 – matrix B zodat de rang van B is 2 , en het stelsel { 1^e rij B , 2^e rij B , 3^e kolom B } lineair onafhankelijk (LOS) is.

5. a) Los het stelsel differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

op met de theorie van eigenwaarden/eigenvectoren.
(Bepaal eerst de matrix A waarvoor $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ en diagonaliseer A)

b) Teken de grafiek (trajectorie) van de oplossing $\mathbf{x}(t)$ die voldoet aan $\mathbf{x}(0) = (4, 1)$

6. Laat $\mathbf{a}$ een vaste vector $\neq \mathbf{0}$ zijn in $\mathbb{R}^3$.
Bewijs dat $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ met $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{a}$ (uitproduct) een lineaire afbeelding is. Wat is de kern (null space) van T ?

Normering :

1. a) 4	**2. a)** 2	**3. a)** 3	**4. a)** 2	**5. a)** 4	**6.** 3
b) 3	**b)** 3	**b)** 3	**b)** 2	**b)** 3	
	c) 2		**c)** 2		

Totaal 36 + 4 = 40 punten