Tentamen Lineaire Algebra voor TW (152121)
dinsdag 3 november 2009; 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

1. Gegeven is een stelsel lineaire vergelijkingen in vier onbekenden x_1, x_2, x_3 en x_4:

$$\begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +\alpha x_4 & =1 \\ 3x_1 & & +3x_3 & & =\beta \\ -x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +\alpha^2 x_4 & =1 \end{array}$$

a) [3pt] Voor welke waarde(n) van α en β heeft het systeem geen oplossingen (inconsistent), respectievelijk één oplossing, respectievelijk meerdere oplossingen?

b) [3pt] Neem $\alpha = 3$ en $\beta = 6$. Los het systeem op en schrijf de oplossing in een parametrische vectorvorm.

2. a) [2pt] Een lineaire transformatie $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ roteert een punt rond de oorsprong over een hoek van $\pi/3$ radialen tegen de klok in en vermenigvuldigt vervolgens de resulterende vector met 2. Bepaal de standaard matrix voor T. Bepaal $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$.

b) [2pt] Laat $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ een lineair afhankelijke verzameling vectoren in $\mathbb{R}^n$ zijn. Stel $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is een lineaire transformatie. Bewijs dat $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)\}$ een lineair afhankelijke verzameling is in $\mathbb{R}^m$.

3. Gegeven is de matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$.

a) [2pt] Bepaal de waarde(n) van a zodat A inverteerbaar is.

In **b)**, **c)**, **d)** neem $a = 1$.

b) [3pt] Bepaal de inverse van A.

c) [1pt] Neem $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Bepaal de oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

d) [1pt] Bepaal $\det(2A)$.

Z.O.Z.

4. **a)** [2pt] Laat A een $m \times n$ matrix zijn. Laat zien dat de nulruimte van A een deelruimte van $\mathbb{R}^n$ is.

b) [1pt] De verzameling vectoren $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p\}$ in $\mathbb{R}^n$ is een basis van een rijruimte van een $m \times n$ matrix A. Bepaal de dimensie van de nulruimte van A. n-p

c) [2pt] Stel $W = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Bepaal het orthogonale complement $W^\perp$ van W. (Volgens definitie, is $W^\perp = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ voor alle } \mathbf{v} \text{ in } W\}$).

d) [2pt] Gegeven is de volgende matrix:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Laat zien dat het system $A\mathbf{x} = 0$ een niet-triviale oplossing heeft. Gebruik hiervoor de stelling over rang A en dim Nul A.

5. Gegeven is het dynamische systeem $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ met $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) [3pt] Geef een algemene oplossing x_k van dit systeem. Bereken eerst van A de eigenwaarden en bijbehorende eigenvectoren.

b) [2pt] Teken typerende trajectoriën in een 2-dimensionaal assenstelsel (plaats pijltjes).

c) [2pt] Bereken $\mathbf{x}_3$ als $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

d) [1pt] Schrijf de matrix A in de vorm $A = PDP^{-1}$. Leg uit waarom dit mogelijk is.

e) [2pt] Bepaal A^4 met zo min mogelijk rekenwerk.

6. [2pt] Bepaal een oppervlakte van een parallelogram in $\mathbb{R}^3$ met hoekpunten $(1, 1, 0)$, $(2, -1, 4)$, $(2, 1, 3)$, $(3, -1, 7)$.

Totaal: 36 + 4= 40 punten

NB: cijfer=([[aantal punten]+4)]/4+bonuspunten), afgerond naar een heel getal.