Tentamen 152121 Lineaire algebra TW

02-11-2010, 8.45-11.45

1 a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & \beta-9 & \alpha-9 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta-8 & \alpha-10 \end{bmatrix}$$ 1,5 pt

$\beta = 8,\ \alpha \neq 10 \Rightarrow$ geen oplossing 0,5

$\beta = 8,\ \alpha = 10 \Rightarrow$ oneindig veel oplossingen (3 vrije variabelen) 0,5

$\beta \neq 8 \Rightarrow$ oneindig veel oplossingen (2 vrije variabelen) 0,5

b) $\alpha = \beta = 9$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{2^e + 3^e \\ 1^e - 3\cdot 3^e}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$x_5 = -1$

x_4, x_3 vrij

$x_2 = 4x_4 - 4x_3$

$x_1 = 6 - 2x_4 + x_3$ 1,5

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Interpretatie: een vlak dat gaat door de punten

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ 0,5

2 a) $T: P_3 \to P_2$

$T(p(x)) = p'(x)$

$T(0) = 0$

$T(p(x) + f(x)) = (p(x) + f(x))' =$

$= p'(x) + f'(x) = T(p(x)) + T(f(x))$

voor alle $p, f \in P_3$

$T(cp(x)) = (cp(x))' = cp'(x) = c\,T(p(x))$

voor alle $p \in P_3$, $c \in \mathbb{R}$ 2

$\Rightarrow$ volgens definitie is T een lineaire transformatie

b) $T(p(x)) = x^2$

$p'(x) = x^2$

$p(x) = \frac{x^3}{3} + c \quad , c \in \mathbb{R}$ 1

$W = \{p(x) : p'(x) = x^2\} = \{p(x) : p(x) = \frac{x^3}{3} + c\}$

0-vector zit niet in $W \Rightarrow$ 1

$\Rightarrow W$ is géén deelruimte.

3 (Th) lin. afh. $\Leftarrow\Rightarrow$ één van vectoren is een lin. comb. van de anderen.

Bewijs: $\Rightarrow$ lin. afh. $\Rightarrow c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = 0$

1 en er bestaat $c_j \neq 0$

$-c_j v_j = c_1 v_1 + \ldots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + c_p v_p$

$v_j = -\frac{c_1}{c_j} v_1 + \ldots + \left(-\frac{c_p}{c_j}\right) v_p$ 1

v_j is een lin. comb. van $\{v_1 \ldots v_{j-1}, v_{j+1} \ldots v_p\}$

($\Leftarrow$) $v_j = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p$

1

$\Rightarrow c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} - 1 \cdot v_j + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p v_p = 0$

coëfficient bij v_j is $-1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ het volgt uit de definitie van lineaire afhankelijkheid dat $\{v_1 \dots v_p\}$ een lin. afh. verzameling is

4 a) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots$ kan ook rijoperaties 2pt

$\det A = 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-8) = -1$) 1pt

$A^{-1} = (-1) \begin{bmatrix} 5 & -3 & -8 \\ +2 & -2 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix}$) 1pt

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$) 1pt

Check: $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6), c) 1) Er bestaat k zodat $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} d \\ e \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ rang $A = 1$ (één lin. onafh. rij)) 0,5

dim Nul $A = 2$ $(= 3 - 1)$

det $A = 0$

1

2) $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} d \\ e \\ 1 \end{bmatrix}$ lin. onafh. $\Rightarrow$

rang $A = 2$, dim Nul $A = 1$ $(= 3 - 2)$) 0,5

det $A = 0$

d) A inverteerbaar => rijen lin. onafh.

=> B heeft p lin. onafh. rijen

=> rang B = p

rang stelling: dim Nul B = n − p

e) rijen van B = eerste p rijen van A

$$A \cdot A^{-1} = I$$

$i \neq j$ => element $I(i,j)$ van $I = 0$

=> [rij i van A] · [~~rij~~ kolom j van A^{-1}] = 0

=> laatste n − p kolommen van A^{-1} voldoen aan de vergelijking

$Bx = 0$, dus laatste n − p kolommen van A zitten in een Nul B.

Verder, de ~~ko~~ kolommen van A^{-1} zijn lin. onafhankelijk (want A^{-1} is inverteerbaar).

We hebben n − p lin. onafh. vectoren in Nul B en dim Nul B = n − p

=> volgens de Basis stelling vormen de laatste n − p kolommen van A^{-1} een basis van Nul B.

5) $A = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.6 \\ -0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$

a) $\det(I - \lambda A) = (1.7-\lambda)(0.7-\lambda) + 0.24$

$= \lambda^2 - 2.4\lambda + 1.43$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2.4 \pm \sqrt{2.4^2 - 4 \cdot 1.43}}{2} = \frac{2.4 \pm 0.2}{2}$$

$\lambda_1 = 1.3 \qquad \lambda_2 = 1.1 \qquad 0,5$

$\lambda_1 = 1.3. \qquad 0.4x_1 + 0.6x_2 = 0$

$-0.4x_1 - 0.6x_2 = 0$

$4x_1 = -6x_2 \qquad x_2 = -\frac{2}{3}x_1$

of $\quad x_1 = -\frac{3}{2}x_2$

$v_1 = \begin{bmatrix} -1,5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad 0,5$

$\lambda_2 = 1.1 \qquad 0.6x_1 + 0.6x_2 = 0$

$0,5 \qquad -0.4x_1 - 0.4x_2 = 0$

$x_1 = -x_2$

$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 0,5$

Algemene oplossing

$1 \quad x_k = c_1 \cdot (1.3)^k \begin{bmatrix} -1,5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 (1.1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

b) $\lambda_1, \lambda_2 > 1 \Rightarrow$ de oorsprong is een afstoter 1

c) $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1.5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$c_1 = -2$

$c_2 = -2$

d) $D = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} -1.5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 1

Mogelijk want $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 1

| 2 lin. onafh. eigenv.

$$x_k = c_1 (-2)(1.3)^k \begin{bmatrix} -1.5 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2)(1.1)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad 1$$

als $k \to \infty$ dan 1 $x_k \approx \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} (1.3)^k$ (eerste coord. gaat naar $+\infty$ en de tweede naar $-\infty$ als $(1.3)^k$)

6) a) $u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 1 $= (-3)e_1 - 3e_2 + 3e_3$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 1$$

b) $u \times v$ is orthogonaal aan zowel u als w 1

$W^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

of $W^\perp = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 1

c) Volume $= \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$ 2

$= |(-1)(-1) \cdot 5 + 1(-11)| = |-6| = 6$ 1