Tentamen LS 1

23-01-2012 8.45-11.45

1 (a) $W \subset M_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$A \in W \iff A_{3,j} = A_{1,j} + A_{2,j} \quad j = 1,2,3$

a) $A = 0$ - nul-matrix

$A_{ij} = 0 \quad \forall \; i,j = 1,2,3$

$\Rightarrow A \in W$

b) $A \in W$, $B \in W$, $C = A + B$

$C_{3,j} = A_{3,j} + B_{3,j} = A_{1,j} + A_{2,j} + B_{1,j} + B_{2,j}$

$= (A_{1,j} + B_{1,j}) + (A_{2,j} + B_{2,j})$

$= C_{1,j} + C_{2,j} \quad j = 1,2,3$

$\Rightarrow C \in W$

c) $A \in W$, $c \in \mathbb{R}$, $D = cA$

$D_{3,j} = cA_{3,j} = c(A_{1,j} + A_{2,j})$

$= cA_{1,j} + cA_{2,j} = D_{1,j} + D_{2,j}$

$\Rightarrow D \in W$

a), b), c) $\Rightarrow$ W is een deelruimte van $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

1 (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & +1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & +1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (*)

$c_1(x^3 + 2x + 1) + c_2(x^3 + x^2 + x + 1) = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$ ↗

Uit (*) $c_2 = -3$

$c_1 = -1+3 = 2$

$-x^3-3x^2+x-1$ is een lin. comb. van x^3+2x+1 en x^3+x^2+x+1.

2. (a) Een verzameling $S \subset V$ is lineair afhankelijk als er bestaat een eindig aantal vectoren $u_1, u_2, \ldots, u_n \in S$ en scalairs $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$, niet allemaal gelijk aan nul, zodat
$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n = \underline{0}.$$

(b)

1) $\text{span}(S) \subset \text{span}(S \cup \{v\})$

want elke lin. comb. van vectoren in S is ook lin. comb. van vectoren in $S \cup \{v\}$

2) Zij $w \in \text{span}(S \cup \{v\})$

$\Rightarrow w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + b v$

voor bepaalde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in F$, $u_1, u_2, \ldots, u_n \in S$

S is lin. onafh. en $S \cup \{v\}$ is lin. afh.

$\Rightarrow v \in \text{span}(S)$ (Stelling 1.7)

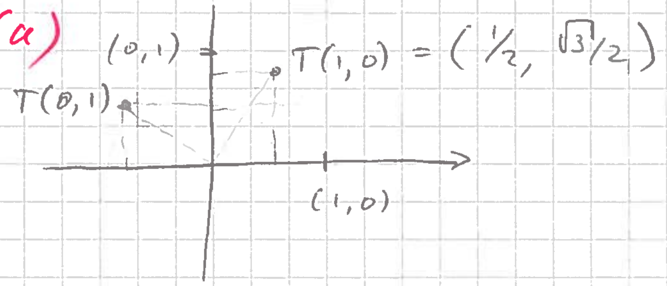
$\Rightarrow v = c_1 u_1' + c_2 u_2' + \ldots + c_p u_p'$ voor bepaalde $c_1, c_2, \ldots, c_p \in F$, $u_1', u_2', \ldots, u_p' \in S$.

Dan $w = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n +$
$+ b(c_1 u_1' + c_2 u_2' + \ldots + c_p u_p')$
$= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n + bc_1 u_1' + bc_2 u_2' + \ldots + bc_p u_p' \in \text{span}(S)$

$\Rightarrow \text{span}(S \cup \{v\}) \subset \text{span}(S)$

1) + 2) $\Rightarrow$ $\text{span}(S) = \text{span}(S \cup \{v\})$.

3 (a)



$$T(1,0) = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$T(0,1) = \left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) "Change of coordinates" matrix van β' naar β

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad Q^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_\beta = Q\,[v]_{\beta'} \qquad = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\beta'} = Q^{-1}\,[T]_\beta\, Q$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} & \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) $[v]_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad [v]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$[T(v)]_{\beta'} = [T]_{\beta'} [v]_{\beta'} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Check: $[T(v)]_\beta = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{3} \\ 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$[T(v)]_\beta = [T]_\beta [v]_\beta = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 - 2\sqrt{3} \\ 2 + 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

4. $T: V \to W$ - isomorfisme, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - basis V
Bewijs dat $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ een basis is voor W.

<u>Bewijs</u> T is one-to-one (injectief)
$\Rightarrow N(T) = \{0\} \Rightarrow$
$\underline{n} = \dim V = \dim(N(T)) + \dim(R(T)) = \underline{\dim(R(T))}$
T is onto (surjectief) $\Rightarrow R(T) = W$
$\Rightarrow \dim(W) = n$.
Verder, $R(T) = \text{span}(T(\beta)) \Rightarrow V = \text{span}(T(\beta))$
$\Rightarrow$

$T(\beta)$ bestaat uit n vectoren en spant W op, en $\dim(W) = n$
$\Rightarrow$ $T(\beta)$ is een basis voor W.

5.

(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \alpha & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & \beta \\ -1 & 4 & -5 & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{a}_4 \quad \underline{b}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -3\alpha & \beta-3 \\ 0 & 6 & -6 & \alpha^2+\alpha & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & \alpha & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -3\alpha & \beta-3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2-2\alpha & \beta-1 \end{pmatrix}$$

$\alpha = 0$ of $\alpha = 2$ en $\beta \neq 1$ $\Rightarrow$ geen oplossing
Alle andere gevallen $\Rightarrow$ oneindig veel oplossingen.

(b) $\alpha = 0$ of $\alpha = 2$ $\Rightarrow$ rang $A = 2$,
lin. onafh. kolommen $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$

$\alpha \neq 0$ en $\alpha \neq 2$ $\Rightarrow$ rang $A = 3$
lin. onafh. kolommen: $\underline{a}_1$, $\underline{a}_2$, $\underline{a}_3$

(c)

$\alpha = 3, \quad \beta = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{pmatrix}$$

$x_4 = 5/3 \qquad x_3$ vrij $\qquad x_2 = -3 + x_3$

$x_1 = 2 - x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 5/3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) $K_H = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$

$\dim(K_H) = 1$

6 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

elke kolom (of rij) is een veelvoud van andere kolom

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae & af & ag \\ bd & be & bf & bg \\ cd & ce & cf & cg \end{pmatrix} \nearrow$$

$A = (\underline{a}_1 \quad \underline{a}_2 \quad \underline{a}_3 \quad \underline{a}_4)$

rang $(A) = 1 \Rightarrow \exists \; j = 1, 2, 3, 4$
zodat $\underline{a}_j \neq 0$ (kolom j is niet-nul kolom) en andere kolommen zijn veelvoud van $\underline{a}_j$

$$\underline{a}_k = c_k \underline{a}_j \quad , \quad c_k \in \mathbb{R}$$

(als $\underline{a}_k = \underline{0}$ dan $c_k = 0$)

Neem $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \underline{a}_j$

Neem $(d \; e \; f \; g) = (c_1 \; c_2 \; c_3 \; c_4)$

Dan $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (d \; e \; f \; g)$.

voor een willekeurige matrix A met rang $(A) = 1$

7 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 10 & 17 \\ +2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ +2 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ +2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ +2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 4(-7) - 2 \cdot (-9) = -10$

$\det A \neq 0 \Rightarrow A$ inverteerbaar.