LINEAIRE STRUCTUREN 1

6-11-2012

1. Nee, aan (V5) is niet voldaan:

$$1 \cdot (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, 0) \neq (a_1, a_2, a_3)$$

als $a_3 \neq 0$.

2.
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & -24 \end{bmatrix}$$

$\beta = \{ 3x^2 + 2x + 1, \; -4x^2 + x - 1, \; x^2 + 1 \}$

3 lin. onafhankelijke vectoren $\Rightarrow$ β is basis voor P_2

3. S lin. afh. $\Leftrightarrow$ één van de vectoren is een lin. comb. van de andere vectoren.

Bewijs.

$\Rightarrow$ $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - lin. afh.

$\Rightarrow$ $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ met

$a_1, a_2, \dots, a_n$ niet allemaal gelijk aan 0.

Stel $a_1 \neq 0$ (zonder verlies van algemeenheid)

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_n \quad (\text{kan, want } a_1 \neq 0)$$

$\Rightarrow$ v_1 is een lin. comb van $\{v_2, v_3, \dots, v_n\}$.

$\Leftarrow$ Één van de vectoren is een lin. comb. van de andere vectoren.

Stel $v_1 = b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots + b_n v_n$

$\Rightarrow -1 \cdot v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + \dots + b_n v_n = \underline{0}$

$-1 \neq 0 \Rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ lin. afh.

4. $T\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ b+c & a-b \end{pmatrix}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$

$T: \mathbb{R}^3 \to M_{2\times2}(\mathbb{R})$

a) $\dim(R(T)) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3 < \dim(M_{2\times2}(\mathbb{R}))$
$(= 4)$

$\Rightarrow$ T is niet surjectief.
(de dimensie van $R(T)$ is kleiner dan $\dim(M_{2\times2}(\mathbb{R}))$, dus

$$R(T) \neq M_{2\times2}(\mathbb{R})$$

b) $[T]_\beta^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $[T(x)]_\gamma = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]_\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$[T]_\beta^\gamma [x]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓

5. $T: V \to W$

a) $N(T) = \{x \in V : T(x) = \underline{0}_W\}$

b) $N(T) = \{\underline{0}\}$. Bewijs dat T injectief is

Bewijs. Stel T is niet injectief.

Dan $\exists$ $x_1, x_2 \in V$ zodat $x_1 \neq x_2$ en

$T(x_1) = w$

$T(x_2) = w$ voor een bepaalde $w \in W$.

T is lineair $\Rightarrow$ $T(x_1) - T(x_2) = T(x_1 - x_2) = \underline{0}$

$\Rightarrow$ $x_1 - x_2 \in N(T)$. Maar $N(T) = \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow$ $x_1 - x_2 = \underline{0}$ $\Rightarrow$ $\underline{x_1 = x_2}$

Contradictie

$\Rightarrow$ T is injectief.

6.

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -8 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & -9 & 9 & -7 & -2 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -7 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

x_5 vrij

$x_4 = -4 - 2x_5$

x_3 vrij

$x_2 = 10 + 3x_5 - 2x_3$

$x_1 = -16 - 5x_5 + 9x_3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 particuliere oplossingen:

$x_3 = 1, \quad x_5 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_3 = 0 \quad x_5 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} -21 \\ 13 \\ 0 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\dim(K_H) = 2$ basis voor K_H: $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

c) B is 4×7 $Bx = \underline{0}$ heeft 4 vrije variabelen.

$\Rightarrow$ B heeft 3 lin. onafh. kolommen

$\Rightarrow$ $\text{rang}(B) = 3$ $\quad L_B(x) = Bx \quad \text{rang}(L_B) = \text{rang}(B) = 3$

$L_B: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{rang}(L_B) < 4 \Rightarrow Bx = d$ heeft niet de oplossing voor alle $d \in \mathbb{R}^4$

Of rang(B) = 3, rang(B|d) kan 3 of 4 zijn => niet altijd hebben wie de oplossing.

7 a)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D^2 = 0$

Stel D inversteerbaar. $\exists\, D^{-1}$ zodat $DD^{-1} = I$

$$D^2 D^{-1} = 0 D^{-1}$$

$$D(DD^{-1}) = 0D^{-1}$$

$$DI = 0$$

$D = 0$ - niet inversteerbaar. Contradictie.

=> D^{-1} bestaat niet. => D niet inversteerbaar.

8. a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2$$

$V = |\cancel{\det} -2| = 2.$

b) Neem vectoren $\{u, v, w\}$ in $\mathbb{R}^3$.

Als vectoren lin. afh. zijn dat ligt één van de vectoren in de vlak opgespannen door de andere vectoren. In dit geval V is de volume van een "plat" figuur =>

$V = 0$. $V = |\det(u\ v\ w)|$ => $\det(u\ v\ w) = 0$.