Tentamen Lineaire Structuren 1 voor TW (201100100)
maandag 21 januari 2013; 8.45 - 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven. Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden. Een (grafische) rekenmachine mag alleen gebruikt worden ter controle.

1. a) [2pt] Bewijs dat $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(F) : a, b, c \in F \right\}$ een deelruimte is van $M_{2\times 2}(F)$.

   b) [2pt] Bepaal een basis en de dimensie van W in a).

2. a) [2pt] Geef de definitie van een lineair onafhankelijke verzameling vectoren.

   b) [3pt] Laat zien dat de verzameling $\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$ lineair onafhankelijk is en een basis voor $P_3(\mathbb{R})$ vormt.

3. [3pt] Een afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ roteert de vector over en hoek van $\pi/3$ radialen tegen de klok in en vermenigvuldigt hem vervolgens met 2. Laat β de standaard basis zijn voor $\mathbb{R}^2$. Bepaal $[T]_\beta$ en $T(3, -2)$.

4. a) [3pt] $T : V \to W$ is een lineaire afbeelding. Laat zien dat als $\dim(V) > \dim(W)$ dan is T niet injectief (one-to-one).

   b) [3pt] Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ die surjectief is. Kan T injectief zijn? Waarom wel/niet?

5. Gegeven is de kanonieke rijvorm van een matrix A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) [2pt] Bepaal A als eerste en derde kolom van A gelijk zijn aan, respectievelijk, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   b) [2pt] Schrijf de algemene oplossing van het systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   c) [2pt] Is het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistent voor alle $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$? Waarom wel/niet?

6. [4pt] Laat K een oplossingsverzameling zijn van een systeem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Bewijs dat $K = s + K_H$ waarbij s een particuliere oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is en K_H de algemene oplossing van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ is.

7. a) [3pt] Bepaal de derde kolom in de inverse van $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

b) [3pt] Gegeven zijn de twee matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal det(A) en det(B).

c) [2pt] Noteer $C = AB$ met A en B zoals in b). Is C inverteerbaar? Waarom wel/niet?

Totaal: 36 + 4= 40 punten

NB: cijfer=([[aantal punten]+4)]/4+bonuspunten), afgerond naar een heel getal.