Tentamen Lineaire Structuren, Vakcode 201100101.

Datum	:	30 januari 2012
Plaats	:	RA 1501
Tijd	:	08.45 – 11.45

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

   (b) Toon aan dat A diagonaliseerbaar is en bepaal deze diagonaal matrix.

   (c) Is A unitair?

2. Zij $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de vectorruimte bestaande uit alle polynomen van graad twee of lager met complexe coëfficiënten. Op deze ruimte geven we het volgende (kandidaat) inproduct

$$\langle f, g \rangle = 4f_0\overline{g_0} + f_1\overline{g_1} + f_2\overline{g_2}. \tag{1}$$

   Hierin is $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$, $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2$ met $f_j, g_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2$.

   (a) Toon aan dat (1) een inproduct op $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ definieert.

   (b) Zij W de lineaire deelruimte opgespannen door $2 + 3t$. Bepaal t.o.v. het inproduct (1) een orthonormale basis van W.

   (c) Vul deze basis van W aan tot een orthonormale basis van $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$.

3. Zij V een (eindig dimensionale) inproductruimte en zij T een lineaire afbeelding van V naar V. We nemen verder aan dat T normaal is.

   (a) Zij $\lambda \in \mathbb{C}$. Bewijs dat $T - \lambda I$ normaal is.

   (b) Bewijs dat voor elke $x \in V$ geldt $\|Tx\| = \|T^*x\|$.

   (c) Bewijs dat als v een eigenvector is van T, dan is het ook een eigenvector van T^*.

4. Zij V een (complexe) vectorruimte met inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zij T een zelf-geadjungeerde afbeeding op V. Toon aan dat de eigenwaarden van T reëel zijn.

Z.O.Z.

5. Zij A een $n \times n$ matrix met karakteristiek polynoom $p(t)$.
   (a) Bewijs dat A inverteerbaar is dan en slechts dan als $p(0) \neq 0$.
   (b) Neem nu aan dat A inverteerbaar is. Toon aan dat A^{-1} te schrijven is in de vorm

$$A^{-1} = b_0 I + b_1 A + b_2 A^2 + \cdots + b_{n-1} A^{n-1}$$

   met $b_k \in \mathbb{C}$.

6. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ met inproduct, zie opgave 2:

$$\langle f, g \rangle = 4 f_0 \overline{g_0} + f_1 \overline{g_1} + f_2 \overline{g_2}. \tag{2}$$

   Hierin is $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2$, $g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2$ met $f_j, g_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2$.
   Verder is de volgende afbeelding van $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ naar $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ gegeven.

$$Tf = f'$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.
   (b) Bepaal T^*.

7. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal de Jordan canonieke vorm van deze matrix.
   (b) Bepaal een matrix Q zodanig dat $Q^{-1} A Q$ gelijk is aan de Jordan canonieke vorm.

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2		Som 3		Som 4	Som 5		Som 6		Som 7	
a	7	a	6	a	5	6	a	6	a	6	a	7
b	6	b	3	b	5		b	6	b	6	b	5
c	4	c	6	c	6							

[1] Totaal is 100. U krijgt 10 punten gratis