Tentamen Lineaire Structuren, Vakcode 201100101.

Datum	:	19 april 2012
Plaats	:	HB 2B
Tijd	:	13.45 – 16.45

Alle antwoorden moeten gemotiveerd worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

   (b) Toon aan dat A diagonaliseerbaar is en bepaal deze diagonaal matrix.

   (c) Hebben A en A^2 dezelfde eigenvectoren?

2. Zij $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ de vectorruimte bestaande uit alle polynomen van graad twee of lager met complexe coëfficiënten. Op deze ruimte geven we het volgende (kandidaat) inproduct

$$\langle f, g\rangle = (f_0 + f_1)\overline{(g_0 + g_1)} + f_1\overline{g_1} + f_2\overline{g_2}. \tag{1}$$

   Hierin is $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$, $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2$ met $f_j, g_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2$.

   (a) Toon aan dat (1) een inproduct op $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ definieert.

   (b) Zij W de lineaire deelruimte opgespannen door $2-2x$. Bepaal t.o.v. het inproduct (1) een orthonormale basis van W.

   (c) Bepaal de beste benadering in W van $f(x) = 7x$.

3. Zij V een (eindig dimensionale) inproductruimte en zij T een lineaire afbeelding van V naar V. We nemen verder aan dat T zelf-geadjungeerd is.

   (a) Voor welke $\lambda \in \mathbb{C}$ is $T - \lambda I$ zelf-geadjungeerd?

   (b) Bewijs dat de eigenwaarden van T reëel zijn.

   (c) Bewijs dat eigenvectoren behorende bij verschillende eigenwaarden van T orthogonaal zijn.

4. Zij V een (complexe) vectorruimte en zij A een lineaire afbeeding op V. Laat $\lambda \neq 0$ een eigenwaarde zijn van A. Toon aan dat λ^{-1} een eigenwaarde is van A^{-1}. Wat geldt voor de bijbehorende eigenvector?

Z.O.Z.

5. Zij A een $n \times n$ matrix met karakteristiek polynoom $p(t)$. Verder is gegeven dat $A^* = 2A$.

   (a) Bewijs dat het karateristieke polynoom voldoet aan $p(t) = 2^n \overline{p(t/2)}$.

   (b) Toon aan dat de enige A die voldoet aan $A^* = 2A$ de nul matrix is.

6. Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ met inproduct, zie opgave 2:

$$\langle f, g \rangle = (f_0 + f_1)\overline{(g_0 + g_1)} + f_1\overline{g_1} + f_2\overline{g_2}. \tag{2}$$

   Hierin is $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2$, $g(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2$ met $f_j, g_j \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, 2$. Verder is de volgende afbeelding van $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ naar $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ gegeven.

$$(Tf)(x) = f(-x)$$

   (a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van T.

   (b) Is T een unitaire afbeelding?

7. Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bepaal de Jordan canonieke vorm van deze matrix.

   (b) Bepaal een matrix Q zodanig dat $Q^{-1}AQ$ gelijk is aan de Jordan canonieke vorm.

Puntenverdeling[1]

Som 1		Som 2		Som 3		Som 4	Som 5		Som 6		Som 7	
a	7	a	6	a	3	6	a	6	a	6	a	7
b	6	b	3	b	6		b	6	b	6	b	5
c	5	c	6	c	6							

[1] Totaal is 100. U krijgt 10 punten gratis