Kenmerk : TW98/T-MA/16/dd
Datum : 3 maart 2000

Vak : **Calculus II voor TW**
Vakcode : 152027

Datum : 20 maart 1998
Tijdstip : 13.30 - 16.30 uur
Plaats : Sportcentrum UT

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Bepaal de 2^e orde Taylorontwikkeling van $f(x,y) = \ln(xy) + x^2(1+xy)$ rond $(1,1)$ en geef duidelijk de orde van de restterm aan.

2. De afbeelding $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven door:
$$f(x,y,v,w) = (y^2 + v + w^2, xw).$$
   (a) Ga na dat voor de vergelijking $f(x,y,v,w) = (0,0)$ rond het punt $(x,y) = (1,0)$ C^1-functies $v(x,y)$ en $w(x,y)$ zijn gedefinieerd, met $v(1,0) = w(1,0) = 0$.
   (b) Bereken de partiële afgeleiden zowel naar x als naar y van de in onderdeel (a) genoemde functies $v(x,y)$ en $w(x,y)$ in het punt $(1,0)$.
   (c) Is de afbeelding $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, gegeven door $g(x,y) = (v(x,y), w(x,y))$, met v en w zoals in onderdeel (a), op grond van de Inverse Functie Stelling lokaal C^1-inverteerbaar rond $(x,y) = (1,0)$?

3. Gegeven is de functie $f : A \to \mathbb{R}$ met
$$A = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \quad \text{en}$$
$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$$
   (a) Bepaal alle kritieke punten van $f(x_1,x_2)$ op A. Bepaal de locale aard van de kritieke punten op het inwendige van A.
   (b) Ga na of f globale extrema op A heeft en zo ja, bepaal deze.

Z.O.Z.

4. Gegeven is het gebied G in $\mathbb{R}^3$ door

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -\sqrt{1-x^2-y^2} \le z \le 1-\sqrt{x^2+y^2}\}$$

(a) Maak een duidelijke schets van G

(b) Bereken

$$\iiint_G z\, dxdydz$$

(Aanwijzing: splits G in twee delen)

5. Laat S het oppervlak zijn in $\mathbb{R}^3$ gegeven door

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+(z+2)^2 = 8, z \ge 0\}$$

De cirkelschijf D wordt gegeven door

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \ge 4 \wedge z = 0\}$$

Het vectorveld $\mathbf{v}$ is gegeven door

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (x^2\cos(xz), y^3 e^{yz}, -e^{-xyz})$$

(a) Maak een duidelijke schets.

(b) Fomuleer de stelling van Stokes en bewijs hiermee dat

$$\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_1 dA = \iint_D \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_2 dA$$

waarin $\mathbf{n}_1$ en $\mathbf{n}_2$ de eenheidsnormalen zijn op S resp. D met positieve z-component.

(c) Bereken $\iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_1 dA$

Normering:

1	:	3	2	a	:	2	3	a	:	5	4	a	:	2	5	a	:	2
				b	:	3		b	:	3		b	:	6		b	:	4
				c	:	2										c	:	4

Totaal: 36 + 4 = 40 punten