Vak : **Calculus II voor WB/TN/TW**
Vakcode : 152027

Datum : 15 maart 1999
Tijdstip : 9.00 - 12.00 uur
Plaats : Sportcentrum

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven is de afbeelding $\mathbf{f} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{f}(u_1, u_2, v_1, v_2) = \begin{bmatrix} 2e^{u_1} + u_2 v_1 - 4v_2 + 3 \\ -6u_1 + u_2 + v_1 - 2v_2 \end{bmatrix}$$

voor $\mathbf{a} = (0,1), \mathbf{b} = (3,2)$ geldt $\mathbf{f}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

   (a) Laat zien dat er een C^2-afbeelding $\mathbf{U} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestaat, zodat $\mathbf{a} = \mathbf{U}(\mathbf{b})$ en $\mathbf{f}(\mathbf{U}(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = 0$ voor $\mathbf{v}$ in een omgeving van $\mathbf{b}$.

   (b) Bereken de Jacobimatrix $D_{\mathbf{b}}\mathbf{U}$ en bepaal $\dfrac{\partial U_1}{\partial v_1}(\mathbf{b})$.

   (c) Bepaal $\dfrac{\partial^2 U_1}{\partial v_1^2}(\mathbf{b})$.

2. Bepaal de 3^e orde Taylorontwikkeling (inclusief de orde van de restterm) rond $\mathbf{a} = (0,1)$ van de functie

$$f(x,y) = \cos(x^2) + \ln\left(\frac{x+1}{y}\right)$$

3. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(x,y) = x^2(1+y)^3 - 6y^2$

   (a) Bepaal de kritische punt(en) van f.

   (b) Onderzoek de aard van de kritieke punten.

   (c) Bereken de globale extrema van f op $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$.

Z.O.Z.

4. Gegeven is het gebied G door $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq \frac{x^2}{y}$ en $1 \leq \frac{y^2}{x} \leq 2$ en $xy \leq 4\}$ en de afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ door $(u,v) = T(x,y) = \left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$

   (a) Maak een schets van G in het (x,y)-vlak.
   (b) Schrijf $\iint_G xy\,dx\,dy$ als som van herhaalde integralen over elementaire gebieden.
   (*Aanwijzing:* U kunt elementaire gebieden van type H_2 gebruiken.)
   U hoeft de integratie niet uit te voeren.
   (c) Maak een schets van $T(G)$ in het (u,v)-vlak.
   (d) Bereken $\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|$.
   (e) Bereken $\iint_G xy\,dx\,dy$.

5. Gegeven is het gebied G in de $\mathbb{R}^2$ door

$$G = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq 4 - x_1^2 \text{ en } x_2 \geq 3x_1 \text{ en } x_2 \geq -3x_1\}$$

   Het vectorveld $\mathbf{w}$ is gegeven door $\mathbf{w}(x_1,x_2) = (x_2, x_1^2)$

   (a) Bereken rechtstreeks $\oint_{\partial G} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})\,ds$, waarin ∂G, de rand van G, in positieve zin doorlopen wordt.
   (b) Verifieer de Stelling van Gauss ($\mathbb{R}^2$) voor het gebied G, met rand ∂G, en het vectorveld $\mathbf{w}$.

6. In $\mathbb{R}^3$ zijn de oppervlakken S_1 en S_2 gegeven door

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } z = 4 - x^2 - y^2\}$$

en

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1 \text{ en } z = 3\sqrt{x^2 + y^2}\}$$

   Tevens is gegeven het vectorveld $\mathbf{w}$ door $\mathbf{w}(x,y,z) = (x^2 + y^2, z^2, y^2 - x^2)$

   (a) Maak een schets van de oppervlakken S_1 en S_2.
   (b) Bereken $\iint_{S_1} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\,dA$ ($\mathbf{n}$ heeft positieve z-component)
   (c) Bereken $\iint_{S_2} \operatorname{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\,dA$ ($\mathbf{n}$ heeft positieve z-component)

Normering:

1 a : 2	2 : 4	3 a : 1	4 a : 1	5 a : 3	6 a : 1
b : 3		b : 2	b : 2	b : 2	b : 3
c : 3		c : 3	c : 1		c : 2
			d : 1		
			e : 2		

Totaal: 36 + 4 = 40 punten