Vak : **Calculus II voor CT/TW/TN/WB**
Vakcode : 152027

Datum : 24 augustus 1999
Tijdstip : 9.00 - 12.00 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Gegeven de functies $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ door

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= x_1 \sin x_2 + x_2 \sin x_3 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1 x_3 - 1 \end{aligned}$$

   (a) Toon aan dat door de vergelijkingen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= 0 \end{aligned}$$

   in een omgeving van $x_3 = 0, x_1$ en x_2 impliciet als functies $x_1 = \varphi_1(x_3), x_2 = \varphi_2(x_3)$ gedefinieerd worden zodanig dat $\varphi_1(0) = 1, \varphi_2(0) = 0$.

   (b) Bepaal

$$\frac{d\varphi_1(0)}{dx_3}, \frac{d\varphi_2(0)}{dx_3} \text{ en } \frac{d^2\varphi_1(0)}{dx_3^2}.$$

2. De functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wordt gegeven door

$$f(x_1, x_2) = e^{x_1 - 1} \ln(x_1 x_2).$$

   (a) Bepaal de 2e orde Taylorontwikkeling inclusief de orde van de restterm van $f(x)$ rond $a = (1, 1)$.

   (b) Bereken de richtingsafgeleide $\partial_w f(a)$ voor die richting w, waarvoor de toename van f maximaal is.

3. Gegeven is de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ door

$$f(x_1, x_2) = x_1^6 - 3x_1^2 x_2 + x_2^3$$

   (a) Bepaal de kritieke punten van f

   (b) Bepaal de extrema van f en de extreme waarden

   (c) Zijn de onder b. gevonden extrema globaal?

4. Beschouw $I = \iint\limits_G y \dfrac{\sin x}{x} dx dy$, waarbij G gegeven is door:

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1 \quad \text{en} \quad y^2 \leq x \leq 1\}$$

(a) Maak een schets van het gebied G.

(b) Schrijf de integraal I op twee manieren als herhaalde integraal.

(c) Bereken I .

5. De gesloten kromme K bestaat uit de volgende deelkrommen

K_1 : het lijnstuk van $(0,0)$ naar $(2,0)$;
K_2 : het deel van de cirkel $(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$
in het eerste kwadrant van $(2,0)$ naar $(0,0)$.

Het vectorveld $\mathbf{v}$ wordt gegeven door $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (-x_2, x_1)$.

(a) Bereken $\int\limits_{K_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ en $\int\limits_{K_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ rechtstreeks.

(b) Verifieer (a) met behulp van de stelling van Green.

6. Het oppervlak S is gegeven door:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3 = 4, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$$

Het vectorveld $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3)$.

(a) Geef een schets van S.

(b) Bepaal rechtstreeks, dus als oppervlakte-integraal $\iint\limits_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA$, met $\mathbf{n}$ de normaal op S met positieve 3^e component.

(c) Bereken $\iint\limits_S \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dA$ met de stelling Gauss.

Normering:

1 a : 2 b : 4	2 a : 3 b : 2	3 a : 2 b : 3 c : 2	4 a : 1 b : 2 c : 1	5 a : 3 b : 3	6 a : 1 b : 4 c : 3

Totaal: 36 + 4 = 40 punten