Tentamen Vector Calculus voor TW

Vakcode 201100104

12 April, 2012

- **Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.**
- **Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

1. Gegeven de functie

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2y^2 - \ln(1 + x^2 + y^2)$$

   a. Is het punt $(0, 0)$ een kritiek punt?

   b. Heeft de functie $f(x, y)$ een lokaal minimum, een lokaal maximum of geen van beiden in het punt $(x, y) = (0, 0)$?

2. Bereken

$$\int_D xy\,dA$$

   met D het gebied begrensd door de lijnen $y = x$ en $y = 3x$ en de hyperbolen $xy = 1$ en $xy = 3$.

   Gebruik de transformaties $\frac{u}{v} \cdot v$

$$x = u/v, \quad y = v$$

   $u \cdot \frac{1}{v}$

   a. Schets het gebied D.

   b. Geef de grenzen van D in het (u, v)-vlak en maak een schets van het gebied in het (u, v)-vlak.

   c. Bereken de Jacobiaan van de transformatie naar het (u, v)-vlak.

   d. Bereken de integraal met behulp van de transformatie naar het (u, v)-vlak.

3. Gegeven de integraal

$$\int\int\int_D \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^k} dA$$

met D de bol $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

(a) Voor welke waarden van $k \in \mathbb{R}$ is de integraal eindig.

(b) Bereken de integraal voor die waarden van k waarvoor hij convergent is.

4. Bereken de integraal

$$\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

met $\mathbf{F}$ het vector veld $\mathbf{F} = 3xz^2\mathbf{i} - x\mathbf{j} - y\mathbf{k}$. Het oppervlak S wordt gegeven door de rand van de massive cylinder $y^2 + z^2 \leq 1$ met $y \geq 0, z \geq 0$ en $0 \leq x \leq 1$.

5. Bereken de integraal

$$\int\int_S \sqrt{1+x^2+y^2} dS$$

met S het oppervlak met de parametrisering

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + v\,\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq \pi.$$

6. Bereken

$$\oint_C (x\sin(y^2) - y^2)dx + (x^2 y\cos(y^2) + 3x)dy$$

met C de rand van de trapezoide met hoekpunten $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$ en $(0,2)$. De orientatie van C is met de klok mee.

Puntentelling

1a: 1	2a: 1	3a: 3	4: 6	5: 6	6: 6
1b: 4	2b: 2	3b: 3			
	2c: 2				
	2d: 2				
5	7 [illegible]	6	6	6	6

totaal 36+4=40 punten