Tentamen Vectorcalculus voor TW

vakcode 201100104

14 april 2014

- **Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.**
- **Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

1. Gegeven zijn de krommen $r_1(t) = \langle t,\, t^2,\, t^3 \rangle$ en $r_2(t) = \langle \sin t,\, \sin 2t,\, t \rangle$, met $t \in \mathbb{R}$.

   a. Bepaal de raaklijn aan de kromme r_2 in het punt waar $t = \frac{1}{4}\pi$.

   b. Stel een vergelijking op voor de hoek waaronder de krommen elkaar snijden in de oorsprong.

2. a. Bepaal de kritieke punten van de functie

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5.$$

   b. Bepaal de extreme waarden van f op het gebied

$$x^2 + y^2 \leq 16$$

3. a. Schets het in de halfruimte $z > 0$ gelegen deel van de paraboloïde $z = 1 - x^2 - y^2$,

   b. en bereken vervolgens de oppervlakte van dit deel van de paraboloïde.

4. Het gesloten oppervlak S wordt gevormd door de zijvlakken van de kubus waarvan $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$ vier hoekpunten zijn. De orientatie van S is met de naar buiten gerichte normaal.

   a. Bepaal met behulp van de divergentie stelling (Gauss)

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

   als

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$$

   b. Bereken $\nabla \times \mathbf{F}$ (ook wel aangeduid met $curl\, \mathbf{F}$)).

   c. Is $\mathbf{F}$ een conservatief vectorveld?

5. Bereken de partiële afgeleiden $\frac{\partial x}{\partial y}$ en $\frac{\partial x}{\partial z}$ als

$$\sin(x^2y^3 + z) = zxy$$

6. Bereken

$$\iint_D \frac{(x-y)^2}{x+y}\, dA$$

met

$$D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ en } 1 \leq x+y \leq 2\}$$

Maak hierbij gebruik van de transformatie

$$x = u + v,\ y = u - v.$$

   a. Beschrijf en teken het gebied D in het (u,v)-vlak.
   Hint: Teken het domein in het x,y-vlak en bepaal eerst hoe de rand van D transformeert.

   b. Bereken de Jacobiaan van de transformatie.

   c. Transformeer de integraal naar u, v variabelen.

   d. Bereken de integraal.

Normering:

1a.	2	**2**a.	2	**3**a.	2	**4** a.	4	**5**	4	**6**a.	2
1b.	2	**2**b.	4	b.	4	b.	2			**6**b.	1
						c.	3			**6**c.	2
										6d.	2

Totaal: 36 + 4 = 40 punten