Algebra, code 151139

Datum	:	18-06-2008
Zaal	:	SP 1
Tijd	:	9.00-12.00

Motiveer al uw antwoorden
Besteed niet te veel tijd aan een afzonderlijk onderdeel. Indien u een onderdeel niet kunt oplossen dan kunt het resultaat van dat onderdeel in latere onderdelen toch gebruiken.

1. Gegeven de permutaties:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

   Schrijf α, β en $\beta\alpha$ als:

   (a) Produkt van disjunkte cykels.

   (b) Produkt van 2-cykels.

2. Zij G de verzameling matrices gegeven door:

$$G = \{\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \ \ \alpha \neq 0\}.$$

   Op G beschouwen we de bewerking matrixvermenigvuldiging.

   (a) Laat zien dat G met matrixvermenigvuldiging een groep is.

   (b) Laat zien dat G isomorf is met $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, de reële getallen ongelijk nul met vermenigvuldiging.

3. Zij $V = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, de viergroep van Klein. Zoals bekend is iedere eindige groep isomorf met een ondergroep van S_n (de permutatiegroep van n symbolen).

   (a) Waarom kan V niet isomorf zijn met een ondergroep van S_3?

   (b) Bepaal een ondergroep H van S_4 zodanig dat V isomorf is met H.

4. (a) Laat J een deelverzameling van een ring R zijn. Wanneer noemen we J een ideaal?

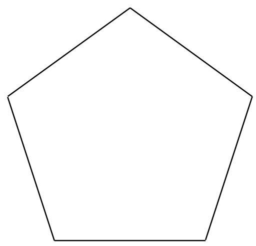
(b) Gegeven $f(x) = x^2 + ax + b \in \mathbb{Z}_2[x]$. Laat zien dat $f(x)$ irreducibel is dan en slechts dan als $a = b = 1$.

(c) Zij $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ en $I =< g(x) >$ het ideaal voortgebracht door $g(x)$. Laat zien dat $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2[x]/I$ een lichaam is.

(d) Hoeveel elementen heeft $\mathbb{F}$?

(e) Bepaal de inverse van $x^2 + 1 + I$.

5. Bepaal met behulp van de stelling van Burnside op hoeveel verschillende manieren de zijden van een in de vorm van een regelmatige vijfhoek gevouwen ijzerdraad gekleurd kunnen worden met twee kleuren.



6. $C \subset \mathbb{Z}_2^7$ is een lineaire code met *parity-check* matrix H gegeven door:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Laat zien dat elk tweetal rijen van H lineair onafhankelijk is.

(b) Bevat C codewoorden van gewicht 3?

(c) Geef de definitie van *Hamming weight* van een lineaire code.

(d) Wat is de *Hamming weight* van C?

(e) Bepaal een *coset leader*, i.e., een woord w van minimaal gewicht zodanig dat $wH = 110$.

(f) Het woord $c = (0001111)$ wordt verstuurd, en het woord $w_r(1101111)$ wordt ontvangen.

i. Decodeer w met behulp van syndroom decodering.

ii. Wat valt u op?

iii. Geef een verklaring.

Puntenverdeling:

1		2		3		4					5	6					
a	b	a	b	a	b	a	b	c	d	e		a	b	c	d	e	f
6	6	6	6	4	6	2	6	5	4	5	10	4	4	2	5	3	6

Cijfer: $1 + \frac{\text{punten}}{10}$