



Algebra

Datum : 24-06-2009

Zaal : SP 2

Tijd : 13.30-16.30

Motiveer al uw antwoorden

Besteed niet te veel tijd aan een afzonderlijk onderdeel. Indien u een onderdeel niet kunt oplossen dan kunt het resultaat van dat onderdeel in latere onderdelen toch gebruiken.

1. Zij G de verzameling matrices gegeven door:

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \right\}.$$

Op G beschouwen we de bewerking matrixvermenigvuldiging.

- (a) Laat zien dat G met matrixvermenigvuldiging een groep is.
 - (b) Laat zien dat G isomorf is met $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, de complexe getallen ongelijk nul met vermenigvuldiging.
2. Ga na of $U(10)$ en $U(12)$ isomorf zijn.
3. Zij $R = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, hierbij is i de imaginaire eenheid.
- (a) Geef de definitie van integriteitsgebied.
 - (b) Laat zien dat R met de gewone optelling en vermenigvuldiging een integriteitsgebied is.
 - (c) Bepaal alle eenheden van R , dat wil zeggen alle elementen van R die een inverse met betrekking tot de vermenigvuldiging hebben. Geef van elk van de door u gevonden eenheid ook de inverse.
4. (a) Laat $a(x) = x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Bepaal alle mogelijke waarden van a_0 en a_1 waarvoor $a(x)$ irreducibel is.
- (b) Bewijs dat $p(x) = x^4 + x + 2 \in \mathbb{Z}_3[x]$ irreducibel is.
 - (c) Zij $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_3[x]/\langle p(x) \rangle$. Is $\mathbb{F}$ een lichaam?
 - (d) Hoeveel elementen heeft $\mathbb{F}$?
 - (e) Wat is de dimensie van $\mathbb{F}$ opgevat als vectorruimte over $\mathbb{Z}_3$? Geef een basis.

- (f) Bepaal de inverse van $x^3 + \langle p(x) \rangle$.
5. (a) Geef de definitie van lineaire code.
- (b) Stel dat het lichaam $\mathbb{F}$ gegeven is. We willen een lineaire code over $\mathbb{F}$ maken van lengte 5, dimensie 2 en Hamming gewicht 3. Laat zien dat zo'n code bestaat door een basis te geven.
- (c) Welk lichaam $\mathbb{F}$ moeten we nemen als we een code willen construeren die uit 16 codewoorden bestaat en lengte 5, dimensie 2 en Hamming gewicht 3 heeft?
- (d) Voor welke waarde van M bestaat er een code van M codewoorden en die lengte 5, dimensie 2 en Hamming gewicht 3 heeft?

Puntenverdeling:

1		2	3			4						5			
a	b		a	b	c	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d
6	6	6	4	6	6	6	6	6	6	4	5	6	5	6	6

Cijfer: $1 + \frac{\text{punten}}{10}$