Tentamen Analyse 2

Vakcode 152140

4 april, 2008

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden en het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Geef de definitie van uniforme continuiteit.

   (b) Bewijs dat $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ uniform continu is op $\mathbb{R}$.

2. Beschouw de oneigenlijke Riemann integraal $I \equiv \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

   Definieer de rij δ_n, met $\delta_n > 0$ en $\delta_n \to 0$ als $n \to \infty$, en $I_{\delta_n} \equiv \int_{\delta_n}^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

   (a) Geef de definitie van een Cauchy rij.

   (b) Laat zien dat de rij $\{I_{\delta_n}\}$ een Cauchy rij is.

   (c) Laat zien dat de oneigenlijke Riemann integraal $I \equiv \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$ bestaat.

3. Zij $p > 0$ en gegeven

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^p}, \quad x \in [0, 1].$$

   (a) Bereken $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Geef de definitie voor uniforme convergentie.

(c) Voor welke waarden van p convergeert $f_n(x)$ uniform op $[0,1]$?

(d) Convergeert $\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx$ voor $p = 2$? Motiveer je antwoord.

4. Definieer voor $\psi \in C[0,\pi]$ en $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T_\lambda(\psi) = e^{-x} + \lambda \int_0^\pi \sin x \sin y \, \psi(y)dy.$$

Gegeven $\psi_0 \in C[0,\pi]$, definieer de functies $\psi_n(x)$ recursief middels

$$\psi_n(x) = e^{-x} + \lambda \int_0^\pi \sin x \sin y \, \psi_{n-1}(y)dy.$$

(a) Laat zien dat ψ_n continue functies zijn voor alle $n \geq 1$.

(b) Voor welke waarden van $\lambda \in [0,\lambda_0]$ convergeert $\psi_n \to \psi \in C[0,\pi]$?

(c) Geef de definitie van een contractie. Wanneer is $T_\lambda(\psi)$ een contractie in de supremum norm?

5. (a) Geef de definitie van een open en gesloten verzameling.

(b) Wat is een metrische ruimte?

(c) Wat is een compacte metrische ruimte?

(d) Bewijs de volgende stelling:

Compacte deelverzamelingen van metrische ruimtes zijn gesloten.

(e) Bewijs de volgende stelling:

Een afbeelding f van een metrische ruimte X naar een metrische ruimte Y is continu op X dan en slechts dan als $f^{-1}(V)$ open is in X voor iedere open verzameling V in Y.

Puntentelling

1a: 1	2a: 1	3a: 1	4a: 3	5a: 1
1b: 2	2b: 2	3b: 1	4b: 2	5b: 1
	2c: 2	3c: 2	4c: 2	5c: 1
		3d: 1		5d: 2
				5e: 2

totaal =27+3=30 punten