Tentamen Analyse 2

Vakcode 152140

17 april, 2009

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. Onderzoek van de volgende reeksen of ze convergeren of divergeren

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}\sin k}{k^{\frac{5}{2}}+k\sin^2 k}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+3}{2k+\sqrt{k}}\right)^{2k}$

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}\sqrt{k}}{k+2}$

2. (a) Geef de definitie van uniforme convergentie

   (b) Bewijs de volgende stelling:

   Zij E een niet lege deelverzameling van $\mathbb{R}$ en veronderstel dat $f_n \to f$ uniform convergeert op E. Indien iedere f_n continu is op een punt $x_0 \in E$, dan is f continu op $x_0 \in E$.

   (c) Gegeven $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$. Bewijs dat

$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$$

3. Wat is de convergentiestraal van de reeksen

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k2^k}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k^2+1}}$

4. (a) Geef de definitie van een compacte metrische ruimte.

   (b) Bewijs dat een compacte verzameling altijd gesloten is.

   (c) Zij X een metrische ruimte en $f : X \to Y$. Bewijs dat f continu is dan en slechts dan indien $f^{-1}(C)$ gesloten is in X voor iedere gesloten verzameling C in Y.

5. Bewijs dat de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a.) continu is op $\mathbb{R}^2$, b.) overal op $\mathbb{R}^2$ eerste orde partiële afgeleides heeft, maar dat c.) f niet differentieerbaar is op $(0,0)$. (Hint gebruik voor b. en c. de definities van de partiële en totale afgeleides als limiet).

6. Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie op $\mathbf{a}$ met $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \neq 0$ voor $\|\mathbf{h}\|$ voldoende klein.

   (a) Bewijs dat $Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|$ begrensd is voor alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$

   (b) Zij $T := -Df(\mathbf{a})/f^2(\mathbf{a})$, laat zien dat

$$\frac{1}{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})} - \frac{1}{f(\mathbf{a})} - T(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}+\mathbf{h})} + \frac{(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}))Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{f^2(\mathbf{a})f(\mathbf{a}+\mathbf{h})}$$

   voor voldoende kleine waarden van $\|\mathbf{h}\|$.

   (c) Bewijs dat $1/f(\mathbf{x})$ differentieerbaar is op $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ en dat geldt

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(\mathbf{a}) = -\frac{Df(\mathbf{a})}{f^2(\mathbf{a})}$$

7. (a) Geef de inverse functiestelling

   (b) Bepaal of voor $f(u,v) = (\ln(uv), u + 4v^3 - 5/u)$ de inverse f^{-1} bestaat en differentieerbaar is in een niet lege open verzameling die het punt $(a,b) = (0,0)$ bevat en bereken $D(f^{-1})(a,b)$ indien deze bestaat. (Opmerking ln is de natuurlijke logaritme)