Tentamen Analyse 2

Vakcode 2010-191521400

22 juni, 2011

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. (a) Gegeven een functierij $f_n : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Geef de definitie van uniforme convergentie van f_n naar een functie f op E.

   (b) Zij $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Convergeert $f_n(x) \to 0$ uniform op $[0,1]$? Motiveer je antwoord.

   (c) Zij $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Convergeert $f_n(x) \to 0$ uniform op $[1,\infty)$? Motiveer je antwoord.

2. Wat is de convergentiestraal van de reeksen

   (a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2 - 2k\ln k + 2)^{k/2}} x^k$$

   (b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} x^k$$

3. (a) Zij $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ een lineaire functie. Geef de definitie van de operatornorm van $\mathbf{T}$.

   Definieer
$$M_1 := \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \quad \text{en}$$
$$M_2 := \inf\{C > 0 \ : \ \|\mathbf{T}(\mathbf{x})\| \leq C\|\mathbf{x}\| \text{ voor alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

(b) Bewijs dat $M_1 \leq \|\mathbf{T}\|$.

(c) Gebruik de lineariteit van $\mathbf{T}$ om te bewijzen dat indien $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ geldt dat

$$\frac{\|\mathbf{T}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq M_1$$

(d) Bewijs dat $M_1 = M_2 = \|\mathbf{T}\|$.

4. (a) Wat is een compacte verzameling. Definieer alle begrippen die je gebruikt in de definitie.

   (b) Bewijs dat een compacte verzameling altijd gesloten is.

   (c) Zij E een niet-lege deelverzameling van een metrische ruimte X met metriek ρ en $f : E \to Y$, met Y een metrische ruimte met metriek τ. Wanneer is een functie f continu op het punt $a \in E$?

   (d) Bewijs de volgende stelling:

   Zij E een compacte deelverzameling van X en $f : X \to Y$, met X, Y metrische ruimtes met, respectievelijk, metriek ρ and τ. Dan is f uniform continu op E d.s.d. indien f continu is op E

5. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3 - 2x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Bewijs dat $f(x,y)$ continu is op $(0,0)$. (Hint, gebruik ϵ, δ formulering continuiteit.)

   (b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (c) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor $(x,y) = (0,0)$.

   (d) Zijn de partiële afgeleiden continu op $(x,y) = (0,0)$?

   (e) Is de functie $f(x,y)$ differentieerbaar op $(x,y) = (0,0)$?

6. Zij S de rand van het domein ingesloten door $y = x^2$, $z = 0$, $z = 1$, $y = 4$.

   (a) Bereken de integraal $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ met $\mathbf{n}$ de uitwendige normaalvector en $\mathbf{F} = (x^2 + \sin(z^2), xy^2, \sqrt{z})$.

   (b) Gegeven de tweevorm $\omega = xyz\, dydz + (x+y) dzdx + z\, dxdy$. Bereken $\int\int_S \omega$.

Puntentelling

1a: 1	2a: 1	3a: 1	4a: 1	5a: 2	6a: 4
1b: 2	2b: 2	3b: 1	4b: 4	5b: 1	6b: 4
1c: 1		3c: 1	4c: 1	5c: 1	
		3d: 1	4d: 4	5d: 1	
				5e: 2	
4	3	4	10	7	8

totaal 36+4=40 punten