Tentamen Analyse 2

Vakcode 191521400

30 Januari, 2013

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. Bereken de convergentiestraal en het interval waarop de volgende reeksen convergeren

   (a)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k^3 - 2k + 2}} x^k$$

   (b)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\arctan k)^2}{k^{\frac{3}{2}} + 1} (x-2)^k$$

2. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)^3 - (x-1)(y-1)^2}{(x-1)^2 + 2(y-1)^2}, & (x,y) \neq (1,1), \\ 0, & (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

   (a) Onderzoek of de functie f continu is voor $(x,y) = (1,1)$. Gebruik de ϵ–δ definitie voor continuïteit.

   (b) Bereken $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ voor $(x,y) = (1,1)$.

   (c) Onderzoek of de functie f differentieerbaar is voor $(x,y) = (1,1)$. Gebruik de definitie van afgeleide.

3. (a) Geef de definitie van een compacte metrische ruimte.

   (b) Bewijs dat een compacte verzameling altijd gesloten is.

   (c) Zij X en Y metrische ruimtes en $f : X \to Y$. Bewijs dat f continu is dan en slechts dan indien $f^{-1}(C)$ gesloten is in X voor iedere gesloten verzameling C in Y.

4. (Quotient regel) Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie op $\mathbf{a}$ met $f(\mathbf{a}) \neq 0$.

   (a) Laat zien dat voor $\|\mathbf{h}\|$ voldoende klein geldt dat $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \neq 0$.

   (b) Bewijs dat $Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|$ begrensd is voor alle $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$

   (c) Zij $T := -Df(\mathbf{a})/f^2(\mathbf{a})$, laat zien dat

$$\frac{1}{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})} - \frac{1}{f(\mathbf{a})} - T(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}+\mathbf{h})} + \frac{(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}))Df(\mathbf{a})(\mathbf{h})}{f^2(\mathbf{a})f(\mathbf{a}+\mathbf{h})}$$

   voor voldoende kleine waarden van $\|\mathbf{h}\|$.

   (d) Bewijs dat $1/f(\mathbf{x})$ differentieerbaar is op $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ en dat geldt

$$D\left(\frac{1}{f}\right)(\mathbf{a}) = -\frac{Df(\mathbf{a})}{f^2(\mathbf{a})}$$

5. (a) Geef de inverse functiestelling

   (b) Bepaal of voor $f(u,v) = (\arctan(1-uv), u^2+4v^2-5/u^2)$ de inverse f^{-1} bestaat en differentieerbaar is in een niet lege open verzameling die het punt $(a,b) = (0,0)$ bevat en bereken $D(f^{-1})(a,b)$ indien deze bestaat.

6. Gegeven het oppervlak $S = S_1 \cup S_2$, met

   $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + 4y^2 \text{ met } 0 \leq z < 1\}$,
   $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 \text{ en } x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

   Gegeven $\int\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ met $\mathbf{n}$ de uitwendige normaal vector en $\mathbf{F} = (x, y, z^4)$.

   (a) Bereken de integraal met behulp van de Stelling van Gauss.

   (b) Bereken de integral direct.

Puntentelling

1a: 3	2a: 2	3a: 1	4a: 1	5a: 1	6a: 3
1b: 3	2b: 1	3b: 3	4b: 1	5b: 4	6b: 4
	2c: 2	3c: 3	4c: 2		
			4d: 2		
6	5	7	6	5	7

totaal 36+4=40 punten