Tentamen Analyse 2

Vakcode 152140

1 juli, 2009

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan

1. Onderzoek van de volgende reeksen of ze convergeren of divergeren. Geef ook aan of de convergentie absoluut is indien de reeks convergeert.

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k \ln(1+k^2)} \right)^{3k}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/4)}{k}$

   (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \cos k}{k^3 - 3k^2 + k}$

   (Opmerking ln is de natuurlijke logaritme)

2. Bewijs de volgende stelling:

   Zij $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ een machtreeks gecentreerd op x_0. Indien $R = 1/\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ dan is R de convergentiestraal van S.

   In het bijzonder geldt:

   (a) $S(x)$ convergeert absoluut voor iedere $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$,

   (b) $S(x)$ convergeert uniform op ieder gesloten interval $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$

   (c) $S(x)$ divergeert voor iedere $x \notin [x_0 - R, x_0 + R]$ wanneer R eindig is.

3. Wat is het convergentieinterval van de volgende reeksen. Geef speciale aandacht aan de grenzen van het convergentieinterval.

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k!}} x^k$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3k}{k\sqrt{k+2}}(1-x)^k$

4. (a) Bewijs de volgende stelling:

   Zij X een volledige metrische ruimte en E een deelverzameling van X. Dan is E volledig dan en slechts dan indien E gesloten is.

   (b) Geef de definitie van de Bolzano-Weierstrass eigenschap.

   (c) Bewijs de Heine-Borel stelling:

   Zij X een separabele metrische ruimte die de Bolzano-Weierstrass eigenschap heeft en H een deelverzameling van X. Dan is H compact dan en slechts dan indien H gesloten en begrensd is.

5. Gegeven de functie

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Bereken de partiele afgeleides $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ op $\mathbb{R}^2$. Dus inclusief het punt $(x,y) = (0,0)$.

   (b) Bewijs dat f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ continu zijn op $\mathbb{R}^2$. (Hint: gebruik de definitie van continuiteit in $\mathbb{R}^n$.)

   (c) Bewijs dat $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = 1$ en $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = -1$.

6. (a) Geef de impliciete functiestelling

   (b) Bewijs dat er functies $u(x,y)$, $v(x,y)$ en $w(x,y)$ en een $r > 0$ bestaan zodanig dat u, v, w continu differentieerbaar zijn en voldoen aan de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} xu^3 - yv - 2w &= 0 \\ x^2v^3 + yu - w^2 \ln w &= 0 \\ w^3 + y^4 - 2x^3 &= 0 \end{aligned}$$

   op de bol $B_r(1,1)$ en $u(1,1) = 1$, $v(1,1) = -1$ en $w(1,1) = 1$.

Puntentelling

1a: 1	2a: 1	3a: 2	4a: 2	5a: 2	6a: 1
1b: 2	2b: 2	3b: 3	4b: 1	5b: 2	6b: 2
1c: 1	2c: 1		4c: 3	5c: 1	

totaal 27+3=30 punten