Aanwijzingen

De toets bestaat uit twee delen, waarvan het eerste deel binnen 60 minuten moet worden ingeleverd. In het eerste deel worden met name begripsvragen gesteld. De antwoorden moeten op een apart vel worden gemaakt.
Vul daarom uw naam, studentennummer en groep duidelijk in.
Het tweede deel van de toets bestaat uit opgaven met wat meer rekenwerk om de operationele kennis te testen. Voor het tweede deel van de toets is 120 minuten aan tijd beschikbaar (plus de tijd die men overhoud van het eerste deel van de toets).
Bij het tentamen mag een formuleblad gebruikt worden dat maximaal20 formules bevat met een korte aanduiding, waarvan er maximaal 10 elektrische beschrijvingen mogen bevatten en maximaal 10 magnetische.

Extra bericht voor studenten die het tentamen maken voor het vak E&M (140525): voor jullie is een extra opgave toegevoegd. Voor het totaal krijgen jullie 30 minuten extra (totaal 210 minuten).

Begripsvragen

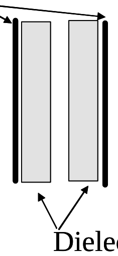
1. Stel je neemt een condensator die bestaat uit twee metalen platen met een lege ruimte ertussen. De condensator is opgeladen maar de platen zijn niet (meer) verbonden met een spanningbron. Je schuift er in het midden twee dunne platen tussen die in eerste instantie tegen elkaar aanliggen. De platen zijn gemaakt van een dielectricum (een isolator, niet een metaal). Vervolgens splits je de platen door ze snel uit elkaar te bewegen naar de platen van de condensator toe. De afstand tussen de condensator platen blijft gelijk. Is de potentiaal tussen de condensator platen gedaald/gestegen? Waarom/waarom niet?
2. Zijn de volgende stellingen **waar** of **niet waar** en waarom, Geef een toelichtingen van minimaal 1 en maximaal 5 zinnen.
   a. De absolute waarde van de kracht tussen twee positieve ladingen is even groot als tussen een negatieve en een positieve lading (gelijke hoeveelheid lading voor alle ladingen).
   b. De totale elektrische flux door een gesloten oppervlak wordt bepaald door de vorm van het oppervlak (met name de oriëntatie van de normaal ten opzichte van de richting van het veld) EN door de ingesloten lading.
   c. De magnetische veldlijnen van een eenparig bewegende lading vormen altijd gesloten lussen.
   d. Binnen in een holle metalen kubus zonder vrije lading maar met een inhomogene oppervlakteladingsdichtheid $s(x,y,z)$ is het veld overal even sterk.
   e. In een homogeen magnetisch veld lopen alle veldlijnen parallel.
   f. Een stuk weekijzer ($\mu r>1$) wordt geplaatst in een magnetisch veld waarbij de normaal van het oppervlak niet parallel loopt aan de magnetische veldlijnen. De magnetische veldlijnen breken dan naar de normaal toe.
   g. Tussen de platen van een lekkende condensator moet de divergentie van de stroomdichtheid gelijk zijn aan nul.
   h. Een metalen schijf draait om zijn as in een homogeen magnetische veld. De draairichting van de schijf (dat is de vector die loodrecht staat op de schijf en volgens de

rechterhandregel uit het oppervlak steekt) staat in de richting van de magnetische veldlijnen. Het centrum van de schijf wordt hierdoor negatief.

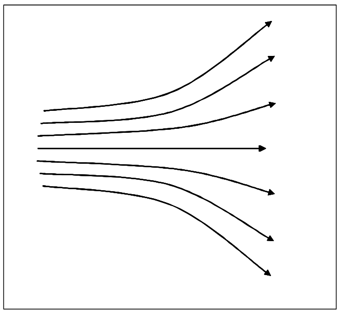
i. De totale statische magnetische flux (flux van het **B**-veld) door een gesloten oppervlak is altijd nul (ongeacht materiaalgrenzen en vrije stromen).

j. Als alle puntladingen in een ruimte hun hoeveelheid lading verdubbelen dan wordt het veld 4 maal zo groot.

3. Beschouw een (oneindig grote) vlakke condensator bestaande uit twee oneindig grote vlakke platen die evenwijdig geplaatst zijn. Beide condensatorplaten zijn bekleed met een dielektisch materiaal (e_r=2). De bekleding is voor beide platen gelijk en even dik en beslaat in totaal 2/3 van het volume van de condensator. Maak een schets van de condensator en teken daarin de gebonden ladingen, de vrije ladingen en de elektrische veldlijnen.



4. Gegeven de nevenstaande elektrische veldlijnen, teken de equipotentiaallijnen.



5. Wat betekent een verhoging van de gradiënt van de potentiaal voor het elektrisch veld?

Rekenvragen:

1) Als de magnetische vector potentiaal **A(**x,y,z) in zijn geheel langs 1 cartesische as (bijv. z) is gericht en lineair afneemt langs een andere as (zeg y), hoe ziet dan de magnetische inductie **B(**x,y,z) er uit? Geef een afleiding van de uitdrukking voor het **B**-veld, waarbij u zelf een keuze maakt voor een gefundeerde mathematische formulering.

2) Een torroidale spoel heeft een hartlijn van 0.2 π m, is gelijkmatig met 500 wikkelingen omwikkeld en bijna geheel gevuld met een weekijzeren kern (mr=2000). De weekijzeren kern heeft een cirkelvormige doorsnede met een straal van 0.01 m (is gelijk aan de doorsnede van de wikkelingen) en kan daarmee klein verondersteld worden t.o.v de straal van de torriodale spoel. In de kern zit een spleet van 2mm met de normalen van de oppervlakken tangentieel aan de hartlijn van de torus. Het strooiveld mag verwaarloosd worden. Stel dat er een stroom van 1A door de wikkelingen loopt. Beantwoord de onderstaande vragen, maar stel daarvoor een duidelijk stappenplan op, waarin duidelijk wordt aangegeven wat wordt uitgerekend, en welke input daarvoor wordt gebruikt.
   a) Wat is de sterkte van het magnetisch veld **H** op de hartlijn in de luchtspleet?
   b) Wat is de sterkte van de magnetische inductie **B** op de hartlijn in de luchtspleet?
   c) Wat is de sterkte van de magnetische inductie **B** op de hartlijn als er geen weekijzeren kern aanwezig is?

3) Gegeven een homogene oppervlakteladingsdichtheid s in de vorm van een cilinder met lengte $2R$ en straal R. Het doel van de opgave is om het veld op een willekeurig punt op de as van de cilinder te berekenen. Hiervoor wordt het probleem in twee stukken opgezet. Eerst moet de bijdrage van een ring van de cilinder aan het veld in een punt op de as worden uitgerekend. Vervolgens wordt het antwoord gebruikt om de bijdrage van de totale cilinder uit te rekenen. De totale lading op de cilinder is gelijk aan Q. De cilinder is zodanig georiënteerd dat de as van de cilinder samenvalt met de z-as

a) Leidt een uitdrukking af voor de lading ΔQ op een ring met dikte dz.

b) Bewijs dat het elektrische veld op de z-as ten gevolge van de ring op locatie z=0 gelijk is aan:

$$\mathbf{E}\left(0,0,z_p\right)=\frac{\Delta Q}{4pe_0}\frac{z_p}{\left(R^2+z_p{}^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}$$

met $[0,0,z_p]$ de coördinaat van het punt waar het veld berekend wordt.

c) Bereken aan de hand hiervan een uitdrukking voor het veld van de hele cilinder op de z-as in punt $[0,0,z_p]$.

d) Schets het verloop van **E** als functie van z door een **E** op aantal punten te berekenen (z>>R, z=+/-2R, z=+/-R, z=0).

Extra opgave voor studenten die het vak E&M (140525) doen.

4) Doe opgave 3 over waarbij de oppervlakteladingsdichtheid is vervangen door een oppervlaktedipoolladingsdichtheid. $\boldsymbol{p}_s$, waarbij alle dipolen in de richting van de positieve z-as zijn gericht. (merk op dat de gegeven uitdrukking in opgave 3b niet meer correct is, geef zelf een gecorrigeerde uitdrukking).

Cartesian. $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{x}} + dy\,\hat{\mathbf{y}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = dx\,dy\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Spherical. $d\mathbf{l} = dr\,\hat{\mathbf{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}; \quad d\tau = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r v_\phi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial t}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylindrical. $d\mathbf{l} = ds\,\hat{\mathbf{s}} + s\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\,\hat{\mathbf{z}}; \quad d\tau = s\,ds\,d\phi\,dz$

Gradient : $$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial s}\hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s}\frac{\partial t}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

Divergence : $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s v_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Curl : $$\nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s}\frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right]\hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}(s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{z}}$$

Laplacian : $$\nabla^2 t = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial t}{\partial s}\right) + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

VECTOR IDENTITIES

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

FUNDAMENTAL THEOREMS

Gradient Theorem : $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergence Theorem : $\int (\nabla \cdot \mathbf{A})\, d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Curl Theorem : $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

FUNDAMENTAL CONSTANTS

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/Nm^2}$		(permittivity of free space)
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$		(permeability of free space)
$c = 3.00 \times 10^{8}\,\mathrm{m}/s$		(speed of light)
$e = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$		(charge of the electron)
$m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$		(mass of the electron)

SPHERICAL AND CYLINDRICAL COORDINATES

Spherical

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\sin\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(\sqrt{x^2+y^2}/z) \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$$

Cylindrical

$$\begin{cases} x = s\cos\phi \\ y = s\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\,\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

6.4 Standaardintegralen .

$I=\int x^m(a^2+x^2)^n\,dx$ Noem $Y=\sqrt{a^2+x^2}$; $Y^2=a^2+x^2$;

m	n	I	m	n	I
-2	-1/2	$-Y/(a^2x)$	1	-3/2	$-1/Y$
-2	-1	$-a^{-2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a})$	1	-1	$\ln\lvert Y\rvert$
-1	-3/2	$a^{-2}(\frac{1}{Y}-\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+Y}{x}\right\rvert)$	1	-1/2	Y
-1	-1/2	$-(1/a)\ln\lvert(a+Y)/x\rvert$	1	1/2	$\frac{1}{3}Y^3$
-1	-1	$a^{-2}\ln\lvert x/Y\rvert$	1	3/2	$\frac{1}{5}Y^5$
0	-3/2	$x/(a^2Y)$	2	-3/2	$\ln\lvert x+Y\rvert-x/Y$
0	-1	$a^{-1}\arctan(x/a)$	2	-1	$x-a\arctan(x/a)$
0	-1/2	$\ln\lvert x+Y\rvert$	2	-1/2	$\frac{1}{2}xY-\frac{1}{2}a^2\ln\lvert x+Y\rvert$
0	1/2	$\frac{1}{2}xY+\frac{1}{2}a^2\ln\lvert x+Y\rvert$	2	1/2	$\frac{1}{8}x(2x^2+a^2)Y-\frac{1}{8}a^4\ln\lvert x+Y\rvert$
0	3/2	$\frac{1}{8}x(2x^2+5a^2)Y+\frac{3}{8}a^4\ln\lvert x+Y\rvert$	3	-3/2	$Y+a^2/Y$
			3	-1/2	$\frac{1}{3}Y^3-a^2Y$
			3	1/2	$\frac{1}{5}Y^5-\frac{1}{3}a^2Y^3$

$I=\int\sin^m ax\cos^n ax\,dx$

m	n	I	m	n	I
1	0	$-(1/a)\cos ax$	1	1	$\left(\sin^2 ax\right)/2a$ of $-\left(\cos^2 ax\right)/2a$
0	1	$(1/a)\sin ax$	2	2	$-\frac{1}{32a}\sin 4ax+\frac{x}{8}$
1	-1	$-(1/a)\ln\lvert\cos ax\rvert$	1	n	$-\frac{\cos^{n+1}ax}{(n+1)a}$
-1	1	$(1/a)\ln\lvert\sin ax\rvert$	m	1	$\frac{\sin^{m+1}ax}{(m+1)a}$
2	0	$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\sin 2ax$	0	2	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4a}\sin 2ax$
3	0	$-\frac{1}{3a}\cos ax(\sin^2 ax+2)$	0	3	$\frac{1}{3a}\sin ax(\cos^2 ax+2)$
4	0	$\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{\sin 4ax}{32a}$	0	4	$\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2ax}{4a}+\frac{\sin 4ax}{32a}$

6.5 Benaderingen voor $\lvert x\rvert\to 0$

$(1+x)^a$	$1+ax+\ldots$	$\sin x$	$x-x^3/6+\ldots$
e^x	$1+x+\ldots$	$\cos x$	$1-x^2/2+\ldots$
$\ln(1+x)$	$x-x^3/2+\ldots$		