Oplossing — versie 1

1. (a) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda - 5) + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Dus

$$(\lambda_1 I - A) = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \implies v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Netzo,

$$(\lambda_2 I - A) = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \implies v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dus

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2e^{2t} + 3e^{3t} & 6e^{2t} - 6e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & 3e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \beta & 5\beta - 6 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}$$

Deze is singulier d.e.s.d. als $\beta^2 - 5\beta + 6$ ofwel d.e.s.d. als $\beta = 2$ of $\beta = 3$.

(c) $F = \begin{bmatrix} 14 & -22 \end{bmatrix}$

(d) $L = \begin{bmatrix} 36 \\ 8 \end{bmatrix}$

(e)

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 19 & -64 \\ 15 & -30 \end{bmatrix}}_{A+BF-LC} \hat{x} + \begin{bmatrix} 36 \\ 8 \end{bmatrix} y, \qquad u = \begin{bmatrix} 14 & -22 \end{bmatrix} x$$

2. (a) Uit de tweede volgt $x_1 = 0$ of $x_2 = -1$. Invullen in de bovenste geeft

$$x_1 = 0 \implies x_2^2 + x_2 = 0 \implies x^* = (0, 0) \text{ of } x^* = (0, -1)$$

en

$$x_2 = -1 \implies x_1^2 = 0 \implies x^* = (0, -1)$$

Kortom er zijn twee evenwichtspunten: $x^* = (0, 1)$ en $x^* = (0, -1)$.

(b)

$$\dot{x}^\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^\Delta$$

(c) Nee, want linearisatie heeft eigenwaarde > 0.

3. (a)

$$R(\xi) = \begin{bmatrix} \xi^3 & 2\xi & \xi^3 + 3 \end{bmatrix}$$

(b) Gebruik $R(\xi) = \xi^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \xi^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w, \tag{1}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} w. \tag{2}$$

(c) Uit de laatste rij volgt dat uitgang w_1 (met w_2 en w_3 ingang) mogelijk is, alsook uitgang w_3 (met dan w_1 en w_2 als ingang).

4. (a)

$$H(s) = \frac{1/(s+1)}{1 + \frac{1}{s}\frac{1}{s+1}} = \frac{s}{s(s+1)+1} = \frac{s}{s^2+s+1}$$

(b) Waarnemercanonieke vorm:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \qquad y = x_2$$

5. Hm, heb ik geen zin in om dit te xfiggen.

6. Nee, want de responsie van $u(t) = t$ is

$$y(t) = t - \mathrm{e}^{-t}$$

terwijl de responsie van de vertraging $v(t) := u(t-1) = t-1$ is

$$\tilde{y}(t) = v(t - \mathrm{e}^{-t}) = t - \mathrm{e}^{-t} - 1$$

hetgeen niet gelijk is aan $y(t-1) = t - 1 - \mathrm{e}^{-(t-1)}$