Make-up Examination

Introduction to Investment Theory (191515603), 2014-2015

Date: 21-January-2015, 13:45 – 16:45 Full Marks : 30

All answers must be motivated **You may use an electronic calculator**
Answers may be written in English or Dutch **Lots of success !**

1. Two coupon-bearing bonds A and B, both of which mature in exactly two years from now, have face values of \$100. Coupons are paid annually. (A coupon payment has just been made in both cases.) Bond A has a coupon rate of 13% and currently sells for a price of \$120.03. Bond B has a coupon rate of 5% and currently stands at a price of \$104.62.

   (a) Calculate the 1-year and 2-year annual spot rates. [4]

   [*If unable to find the answers, assume* $s_1 = 2.00\%$ *and* $s_2 = 2.30\%$ *for the following.*]

   (b) Suppose I want to invest (in this economy) \$1000 one year from now. How much money should I expect to receive one year thereafter, according to the *expectation dynamics of term structure*? [2]

   (c) Recall that duration of a bond is a quantity that can be used to measure the sensitivity of the price of the bond w.r.t. the change in the yield of the bond. Give the formula for the duration of bond A if the yearly yield is λ. [2]

2. Consider two assets X and Y whose rate of returns have the same mean (μ) and the same variance (σ^2). Suppose the correlations coefficient between the two rate of returns is $\rho < 1$. We want to create a portfolio, consisting of assets X and Y only, whose rate of return has minimal variance. [Note that the mean rate of return is already determined, namely still μ.]

   (a) Find this portfolio with minimal variance, and show that the answer does not depend on the value of ρ. [4]

   (b) Find the variance of the portfolio found in (a.), and show that this (minimum variance) does depend on the value of ρ. Discuss the case $\rho = -1$. [2]

3. Mr. Albert has a house (worth 3 million dollars) not so far from the coast of North Carolina. He has learnt that there is a probability of 0.001 of his house being damaged due to some natural calamity during the next year. In the case of a damage it would cost him roughly 60% of the value of the house. He has currently 2 million dollars in his savings account. If Mr. albert has logarithmic utility behaviour, find the premium he is willing to pay for the next year to insure his house (from the damage from natural calamity). [4]

4. It is now 1 October. Mr. Marshal Arts wants to buy a futures contract of the Zeta Corporation maturing 31 September next year. The current price of one share of Zeta Corporation is \$60 and it is expected to pay a dividend of \$5 on 1 April next year. If the current interest rate is 2.4% per year (with quarterly compounding) calculate the futures price of the one Mr. Arts want to buy. [4]

5. Suppose that the price of a stock, currently \$50 per share, either increases by a factor of 1.05 or decreases by a factor of 0.95 per month. Suppose the riskfree interest rate is $r = 0.002$ per month. We are interested in pricing options using the binomial tree method.

(a) Compute the risk-neutral probability q of the underlying stock price going up. [1]

> You may use any fact/formula leading to q. For example: under the risk neutral probabilities, the expected return from the stock must be equal to the risk-free return.
>
> *If unable to find, assume* $q = 0.45$ *as answer to (a) for the following questions.*

(b) Construct a relevant binomial tree and based on the tree calculate the price of a European put option on the stock with strike price $K = \$50$ and maturity 2 month. [4]

(c) Briefly explain what the Put-Call parity is and why the relationship holds. Finally, use the parity and your answer in part (b) to calculate the price of a European call option on the same stock with the same strike and maturity as in part (b). [3]

Final Grade:	$\dfrac{\text{score on exam}}{30} \times 9 + 1$ (rounded off to an integer)

Nederlandse versie

Te behalen punten: 30

1. Beschouw twee coupon gevende obligaties ("bond") A en B, beide met een vervaldatum ("maturity") van 2 jaar en nominale waarde ("face value") van \$100. De coupons voor beide obligaties worden jaarlijks uitbetaald. (Er was voor allebei een coupon net uitbetaald.) De obligatie A betaalt een jaarlijkse coupon van 13% en heeft nu een prijs van \$120.03. De obligatie B betaalt een jaarlijkse coupon van 5% en de huidige prijs is \$104.62.

   (a) Bepaal de spot rentetarieven s_1 en s_2, voor 1 jaar en 2 jaar, respectievelijk. Vermeld ze, zoals gebruikelijk, op jaarbasis. [4]

   [*Indien niet gevonden, neem dan aan dat* $s_1 = 2.00\%$ *en* $s_2 = 2.30\%$ *voor de volgende.*]

   (b) Ik wil in deze economie een jaar later (van nu) \$1000 investeren. Hoeveel krijg ik nog een jaar later terug volgens de "*expectation dynamics of term structure*"? [2]

   (c) Zoals bekend wordt de duur ("duration") van een obligatie gebruikt om de gevoeligheid van de obligatieprijs aan de schommeling in het effectieve rendement ("yield-to-maturity") te bepalen. Geef de formule voor de duur van de obligatie A in termen van λ, waarbij λ het effectieve rendement van de obligatie A is. [2]

2. Beschouw twee *assets* X en Y met hetzelfde verwachte rendement (μ) en dezelfde variantie (σ^2) van de rendementen. De correlatiecoëfficient tussen de twee rendementen ρ is kleiner dan 1. We willen een *portfolio* construeren bestaande uit alleen de *assets* X en Y, zodat het rendement van de *portfolio* minimale variantie heeft. [Merk op dat het verwachte rendement van de *portfolio* altijd μ is.]

   (a) Bepaal de "minimum-variance" *portfolio* en laat zien dat je antwoord onafhankelijk is van de waarde van ρ. [4]

   (b) Bereken de variantie van de optimale *portfolio* gevonden in deel (a) en laat zien dat dit wel afhankelijk is van de waarde van ρ. Bespreek het scenario $\rho = -1$. [2]

3. Dhr. Albert heeft een huis (met een waarde van 3 miljoen dollar) niet ver van de kust van North Carolina. Hij meent dat er 0.001 kans is dat het huis een schade (over het komende jaar) kan oplopen door een natuurlijke calamiteit. Zo'n schade gaat hem ongeveer 60% van de waarde van het huis kosten. Nu heeft hij 2 miljoen dollar in zijn spaarrekening. Als dhr. Albert een logaritmisch nutsfunctie ("utility function") heeft, bepaal hoeveel hij bereid is te betalen aan premie voor het komende jaar om zijn huis te verzekeren (tegen schade door natuurlijke calamiteit). [4]

4. Het is nu 1 oktober. Dhr. Marshal Arts wil een *futures* contract kopen over (een aandeel van) de Zeta Corporation met een vervaldatum ("maturity") van 31 september volgend jaar. De huidige prijs van een aandeel van de Zeta Corporation is \$60 en de verwachting is dat er in 1 april volgend jaar een dividend van \$5 wordt uitgekeerd. Als de huidige jaarlijkse rentevoet 2.4% is met driemaandelijkse *compounding*, bereken de *futures* prijs van de *futures* die dhr. Arts wil kopen. [4]

5. De huidige prijs van een aandeel is \$50. Veronderstel dat de prijs in een maand ofwel met een factor 1.05 stijgt ofwel met een factor 0.95 daalt. Neem aan dat de huidige maandelijkse rentevoet $r = 0.002$ is. We moeten prijzen van opties bepalen gebruikmakend van binomiale bomen.

   (a) Bepaal de risico-neutrale kans q dat in een maand de prijs van het onderliggende aandeel stijgt. [1]

   [Je mag een formule gebruiken zonder verder uitleg, bijvoorbeeld, dat de verwachte rendement van het aandeel (in een maand) gelijk moet zijn met de risico-vrije rente als men de risico-neutrale kansen gebruikt om de verwachting te berekenen.

   Indien niet gevonden, neem $q = 0.45$ *aan voor de volgende onderdelen.*]

   (b) Construeer een relevante binomiale boom en bepaal de prijs van een *European put* optie voor het genoemde aandeel met een *strike* prijs van $K = \$50$ en vervaldatum van 2 maanden. [4]

   (c) Verklaar kort wat de Put-Call parity is en waarom dit geldt. Gebruik de *parity* en je antwoord in deel (b) om de prijs te bepalen van een *European call* optie voor dezelfde aandeel met dezelfde strike en dezelfde vervaldatum zoals in deel (b). [3]

Eindcijfer: $\dfrac{\text{behaalde punten}}{30} \times 9 + 1$ (afgerond tot een geheel getal)