Final Examination

Introduction to Investment Theory (191515603), 2013-2014

Date: 6-November-2013, 13:45 – 16:45 Full Marks : 36

All answers must be motivated **You may use an electronic calculator**
Answers may be written in English or Dutch **Lots of success !**

1. An insurance company has liabilities of 6 million euro due in 8 years' time and 11 million euro due in 15 years' time. Assume that the current interest rate of 8% per annum (with yearly compounding) will remain same in the future.

   (a) Find the present value of the liabilities of the insurance company. [2]

   (b) Find the duration of the liabilities. [3]

   [If unable to find, assume the answers in (a) and (b) to be 7.0519 and 12.5236, resp.]

   To meet these liabilities the insurance company creates a portfolio with x unit of 5-year zero-coupon bond and y unit of 20-year zero-coupon bond. All the bonds have a face value of one million euro. It can be shown that the duration of portfolio is $\dfrac{5\cdot(1.08)^{15}\,x+20\,y}{(1.08)^{15}\,x+y}$

   (c) If the insurance company wishes to ensure that it is immunised against small changes in the rate of interest, what should be x and y? [3]

2. In a certain economy the risk-free interest rate is 5% per year and it is constant over time. It is believed in this economy that the return, r, of any well-diversified portfolio is described by a two-factor model: $r = a + b_1 f_1 + b_2 f_2$, where f_i is the i-th (random) factor and b_i is the corresponding *factor loading*.

   Recall that in such a situation the expected return of the portfolio depends on the risk-free rate, the *price of risk* (or *factor price*) associated with the factors and the factor loading. Recall also the standard notations:

   λ_0: return from risk-free asset, $\lambda_1,\ \lambda_2$: factor prices for factor 1 and 2, respectively.

   Suppose you have identified two well-diversified portfolios.

   Portfolio **A** with factor loadings $b_{A,1} = 4,\ b_{A,2} = -2$ and expected return 13% per year.
   Portfolio **B** with factor loadings $b_{B,1} = 2,\ b_{B,2} = -5$ and expected return 17% per year.

   (a) What are the values of λ_0, λ_1 and λ_2 in this economy? [3]

   (b) Suddenly you discover another well-diversified portfolio **C**, with factor loadings $b_{C,1} = 2,\ b_{C,2} = -2$ and expected return 15% per year.

   Denoting by $r_A,\ r_B,\ r_C$ the retuns of the portfolios **A**, **B**, and **C**, respectively, it is easy to see that $\frac{3}{8}\,r_A + \frac{2}{8}\,r_B$ has same coefficients associated to f_1 and f_2 as those in r_C.

   Show that the situation is inconsistent with the believed two-factor model. [2]

   *[Hint: You may use (a) or you can construct and use a new portfolio consisting of **A**, **B** and the risk-free asset with suitable weights w_A, w_B and $(1 - w_A - w_B)$ so that the return of the new portfolio has the same factor loadings as those in r_C.]*

   (c) Construct a portfolio consisting of **A**, **B**, **C** and the risk-free asset, which has a higher risk-free return than 5%. (Assume that short selling is allowed.) [2]

   (d) Describe how you can create an aribitrage opportunity in this situation. [2]

3. Mr. Smith has just bought an expensive new bike with 1500 euro. He has another 2000 euro at his disposal. He is considering whether to buy an insurance against theft because if this bike is stolen he must buy again a new one. He believes that there is a 2% chance that his bike will be stolen within the coming year and he has logarithmic utility behaviour. Use the certainty equivalent principle to determine how much he is willing to pay as premium for the coming year to insure his bike against theft. [3]

4. A one-year forward contract is to be made today on a share/stock with a current price of 10.50 euro. It has been promised to the shareholders that they will receive dividends of 1.10 euro per share exactly six months from now and again in one year. Currently, the 6-month risk-free spot rate of interest is 4.5% per annum and the 12-month risk-free spot rate of interest is 5% per annum. Assume half-yearly compounding. Calculate the forward price to be stated in the forward contract. [4]

5. A **look-back call option** is like a call option except that the strike price (K) is not fixed at the beginning. It is determined at maturity by the minimum of the price of the underlying asset during the period of the option, i.e., $K = S_{min}$, where S_{min} is the minimum value of the underlying asset over the period from initiation to maturity T. As a result, a European look-back call has payoff (at maturity) $= \max\{0, S_T - S_{min}\}$.

   We want to find the value of a European look-back call option with maturity two months from now, for a stock with current price $S_0 = 100$ and (annual) volatility $\sigma = 0.20$. The current (annual) interest rate is $r = 3.6\%$, compounded monthly.

   We shall use a two-period binomial tree, with a period being a month to find the required option price. Recall that a consistent way to define the binomial parameters is to set $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ and $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

   (a) Compute the risk-neutral probability q of the underlying stock price going up, by using the fact that risk-neutral valuation formula also holds for the stock price, i.e., the current price is the discounted expected value of the price a period later, where expectation is taken w.r.t. the risk-neutral probabilities. [2]

   [If unable to find, assume $q = 0.45$ as answer to (a) for the following questions.]

   (b) Construct a relevant binomial tree and determine all possible payoffs at maturity. [3]

   [Hint: note that the payoffs are path-dependent, i.e., dependent on the price development of previous time steps.

   If unable to find, assume the payoffs to be path independet: given by 11, 6, and 0.]

   (c) Use (b) to find the price of the European look-back call option described above. [3]

6. Explain briefly (maximal length: 3 quarters of a page) with the help of a concrete example what the differences are between an option and a forward. Include in your explanation in which situation one would prefer one to the other. [4]

Final Grade:	$\dfrac{\text{score on exam} + 4}{4}$	(rounded off to an integer)

Nederlandse versie | Te behalen punten: 36

1. Een verzekeringsmaatschappij heeft verplichtingen (*liabilities*) van 6 miljoen euro verschuldigd in 8 jaren, en 11 miljoen euro verschuldigd in 15 jaren. Veronderstel dat de huidige rente van 8% per jaar (met jaarlijkse *compounding*) in de toekomst hetzelfde blijft.

   (a) Bepaal de contante waarde (*present value*) van de verplichtingen van de verzekeringsmaatschappij. [2]

   (b) Bepaal de duur (*duration*) van de schulden. [3]

   [Indien niet gevonden, neem dan aan dat de antwoorden van (a) en (b) respectievelijk 7.0519 en 12.5236 zijn.]

   Om aan deze verplichtingen te voldoen, creëert de verzekeringsmaatschappij een portfolio met x eenheden van een 5-jarig *zero-coupon* obligatie (*bond*) en y eenheden van een 20-jarig *zero-coupon* obligatie. Alle obligaties hebben een nominale waarde (*face value*) van 1 miljoen euro. Er kan worden aangetoond dat de duur van de portfolio $\dfrac{5\cdot(1.08)^{15}\,x+20\,y}{(1.08)^{15}\,x+y}$ is.

   (c) Als de verzekeringsmaatschappij graag zeker wil zijn dat het ongevoelig is voor (*immunised against*) kleine veranderingen in de rente, wat moeten x en y dan zijn? [3]

2. De risico-vrije (*risk-free*) rente in een bepaalde economie is 5% per jaar en is constant over de tijd. In deze economie neemt men aan dat de *return*, r, van elke goed gediversifieerde portfolio wordt beschreven door een twee-factor model: $r = a + b_1 f_1 + b_2 f_2$, met f_i de i-de (random) factor en b_i de corresponderende gewicht (*factor loading*).

   Herinner dat in zo'n situatie, de verwachte return van de portfolio afhangt van de risico-vrije rente, de prijs van risico (of factor prijs) geassocieerd met de factoren en de gewichten. De standaard notatie is

   λ_0: return van de risico-vrije *asset*, λ_1, λ_2: factor prijzen voor factoren 1 en 2, resp.

   Veronderstel dat u twee goed gediversifieerde portfolios heeft geïdentificeerd.

   Portfolio **A** met gewichten $b_{A,1} = 4$, $b_{A,2} = -2$ en verwachte return van 13% per jaar.
   Portfolio **B** met gewichten $b_{B,1} = 2$, $b_{B,2} = -5$ en verwachte return van 17% per jaar.

   (a) Wat zijn de waarden van λ_0, λ_1 en λ_2 in deze economie? [3]

   (b) Opeens ontdekt u een andere goed gediversifieerde portfolio **C**, met gewichten $b_{C,1} = 2$, $b_{C,2} = -2$ en verwachte return 15% per jaar.

   Laat r_A, r_B, en r_C de retuns zijn van de portfolios **A**, **B**, en **C**, respectievelijk. Het volgt dat $\frac{3}{8}\,r_A + \frac{2}{8}\,r_B$ dezelfde coëfficiënten geassocieerd met f_1 en f_2 heeft als die in r_C.

   Toon aan dat de situatie strijdig is met het veronderstelde twee-factor model. [2]

   [Hint: U kunt (a) gebruiken, of u kunt gebruik maken van een nieuwe portfolio bestaande uit ***A***, ***B*** *en de risico-vrije* asset *met geschikte gewichten w_A, w_B en $(1 - w_A - w_B)$ zo dat de return van de nieuwe porfolio dezelfde gewichten (*factor loadings*) heeft als die van r_C.]*

   (c) Construeer een portfolio bestaande uit **A**, **B**, **C** en de risico-vrije *asset*, die een hogere risico vrije rendement heeft dan 5%. [2]

   (d) Beschrijf hoe u een *arbitrage* mogelijkheid creëert in deze situatie. [2]

3. De heer Smith heeft onlangs een dure, nieuwe fiets van 1500 euro gekocht. Hij heeft nog 2000 euro tot zijn beschikking. Hij overweegt of hij een verzekering tegen diefstal moet kopen want als deze fiets gestolen wordt moet hij weer een nieuwe kopen. Hij denkt dat de kans dat zijn fiets het komende jaar gestolen wordt 2% is, en hij heeft een logaritmisch nutsfunctie. Gebruik het *certainty equivalent principle* om te bepalen hoeveel hij bereid is te betalen aan premie voor het komende jaar om zijn fiets te verzekeren tegen diefstal. [3]

4. Vandaag wordt er een 1-jarig *forward* contract afgesloten over een aandeel dat een huidige prijs van 10.50 euro heeft. Aan de aandeelhouders is beloofd dat zij een *dividend* ontvangen van 1.10 euro per aandeel over precies zes maanden, en opnieuw over een jaar. Momenteel is de 6-maanden risico-vrije *spot* rentevoet 4.5% per jaar, en de 12-maanden risico-vrije *spot* rentevoet is 5% per jaar. Veronderstel halfjaarlijkse *compounding*. Bereken de *forward* prijs dat in het *forward* contract moet worden vermeld. [4]

5. Een **look-back call** optie is net als een *call* optie behalve dat de *strike price* (K) niet vastgesteld wordt op tijdstip nul. Het wordt bepaald op de vervaldag (*maturity*) door de minimale prijs van de onderliggende *asset* gedurende de periode van de optie, d.w.z. $K = S_{min}$, waarbij S_{min} de minimale waarde van de prijs van de onderliggende *asset* is gedurende de periode van initiatie tot de vervaldatum (*maturity*) T. Met andere woorden, een Europese look-back call heeft uitbetaling (*payoff*) $= \max\{0, S_T - S_{min}\}$ op de vervaldag.

   We willen de waarde bepalen van een Europese look-back call optie met vervaldatum over twee maanden, voor een aandeel met huidige prijs $S_0 = 100$ en (jaarlijkse) *volatility* $\sigma = 0.20$. De huidige (jaarlijkse) rentevoet is $r = 3.6\%$, met maandelijkse *compounding*.

   We gebruiken een twee-periode binomiale boom, met periode gelijk aan een maand om de benodigde aandeelprijs te bepalen. Herinner dat een consistente manier om de binomiale parameters te definiren, als volgt is: $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ and $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

   (a) Bepaal de risico-neutrale kans q dat het onderliggende aandeelprijs stijgt, door gebruik te maken van het feit dat de risico-neutrale *valuation* formule ook geldt voor de aandeelprijs zelf, d.w.z., de huidige prijs is de verdisconteerde verwachte waarde van de prijs een periode later, waar de verwachting wordt genomen m.b.t. de risico-neutrale kansen. [2]
   [Indien niet gevonden, veronderstel $q = 0.45$ als antwoord op (a).]

   (b) Construeer een relevante binomiale boom, en bepaal alle mogelijke uitbetalingen op de vervaldatum. [3]

   [Hint: merk op dat de uitbetalingen is pad-afhankelijk, d.w.z. afhankelijk van de prijsontwikkelingen in de eerdere tijdstippen.

   Indien niet gevonden, neem aan dat de uitbetalingen pad onafhankelijk zijn met de waarden: 11, 6 en 0.]

   (c) Gebruik (b) om de prijs van de Europese look-back call optie, zoals hierboven beschreven, te bepalen. [3]

6. Verklaar kort (maximale lengte: driekwart pagina) met behulp van een concreet voorbeeld wat de verschillen zijn tussen een optie (*option*) en een *forward*. Verklaar tevens in welke situaties men de een boven de ander zal prefereren. [4]

Eindcijfer:	$\dfrac{\text{behaalde punten} + 4}{4}$	(afgerond tot een geheel getal)