Vak	:	**Lineaire Analyse**
Vakcode	:	151124
Datum	:	Woensdag, 26 januari 2005
Tijdstip	:	9.00–12.00
Plaats	:	SC-0

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.

1. Zij $\mathbb{P}_2$ de lineaire ruimte van alle polynomen van graad maximaal gelijk aan twee. Op deze lineaire ruimte beschouwen we de afbeelding $\mathcal{Q}$ als zijnde

$$(\mathcal{Q}f)(t) = \frac{df}{dt}(t), \qquad f \in \mathbb{P}_2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Toon aan dat $E := \{1, t, t^2\}$ een basis is van $\mathbb{P}_2$

   (b) Bereken $[\mathcal{Q}]_E$.

   (c) Bepaal de eigenwaarden van $\mathcal{Q}$.

   (d) Is $\mathcal{Q}$ diagonaliseerbaar?

2. Bewijs met behulp van de definitie de volgende eigenschappen van een (complex) inproduct.

   (a) $\langle u|\alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u|v\rangle$.

   (b) $\langle u|v + w\rangle = \langle u|v\rangle + \langle u|w\rangle$.

3. Beschouw de Hilbert ruimte $\ell_2(\mathbb{C})$ van alle complexe rijtjes $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ met als inproduct

$$\langle (x_n)|(y_n)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n\overline{y_n}. \tag{2}$$

   Let op: De indeces lopen over alle gehele getallen, en mogen dus negatief zijn.

   Laat N een vast geheel getal zijn, en definieer de lineaire afbeelding A_N van $\ell_2(\mathbb{C})$ naar $\mathbb{C}$ als

$$A_N(x_n) = x_N \tag{3}$$

   Dus deze afbeelding voegt aan een rijtje de N-de component toe.

   (a) Toon aan dat A_N een begrensde afbeelding is.

   (b) Bepaal $\|A_N\|$.

Z.O.Z.

Beschouw nu de deelverzameling $\ell_{2,\text{oneven}}(\mathbb{C})$ van $\ell_2(\mathbb{C})$

$$\ell_{2,\text{oneven}}(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n = -x_{-n}, \text{ en } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}. \tag{4}$$

(c) Toon aan dat $\ell_{2,\text{oneven}}(\mathbb{C})$ een lineaire deelruimte is van $\ell_2(\mathbb{C})$.

(d) Toon aan dat $\ell_{2,\text{oneven}}(\mathbb{C})$ een gesloten lineaire deelruimte is van $\ell_2(\mathbb{C})$.
Hint: Je kunt de operatoren A_N gebruiken.

(e) Als inproduct op $\ell_{2,\text{oneven}}(\mathbb{C})$ nemen we nu het inproduct van $\ell_2(\mathbb{C})$.
Bepaal voor dit inproduct een maximaal orthonormaal stelsel van $\ell_{2,\text{oneven}}(\mathbb{C})$.

4. Zij W de lineaire deelruimte van $L^2(0,\infty)$ voortgebracht door e^{-t} en e^{-2t}. Verder is gegeven de functie $f(t) = e^{-3t}$. Bepaal de beste benadering van f in W.

5. Zij $\mathbb{P}$ de lineaire ruimte van alle polynomen. Op deze ruimte beschouwen we twee afbeeldingen $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$. Beide afbeeldingen voegen aan een polynoom weer een nieuw polynoom toe, namelijk

$$(\mathcal{P}f)(t) = tf(t), \qquad f \in \mathbb{P}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$(\mathcal{Q}f)(t) = \frac{df}{dt}(t), \qquad f \in \mathbb{P}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

(a) Toon aan dat $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$ lineaire afbeeldingen zijn van $\mathbb{P}$ naar $\mathbb{P}$.

(b) Bepaal een eigenwaarde van $\mathcal{Q}$.

(c) Toon aan dat $\mathcal{P}$ geen eigenwaarden heeft.

(d) Bewijs de volgende "Heisenberg onzekerheidsrelatie".

$$\mathcal{QP} - \mathcal{PQ} = I. \tag{7}$$

Normering:

1	a	:	5	2	a	:	6	3	a	:	6	4	:	9	4	a :	9
	b	:	4		b	:	6		b	:	6					b :	4
	c	:	5						c	:	6					c :	5
	d	:	3						d	:	6					d :	4
									e	:	6						

Totaal: 90 + 10 = 100 punten