Vak	:	**Lineaire Analyse**
Vakcode	:	151124
Datum	:	Donderdag, 7 april 2005
Tijdstip	:	13.30–16.30
Plaats	:	SP-1

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.

1. Beschouw de lineaire ruimte $\mathbb{P}_2$, de ruimte van polynomen met graad ten hoogste twee. Op deze ruimte definieren we de afbeelding

$$(Qf)(t) = (t+1)\frac{df}{dt}(t). \tag{1}$$

   (a) Toon aan dat Q een lineaire afbeelding is van $\mathbb{P}_2$ naar $\mathbb{P}_2$

   (b) Zij $\mathcal{E} = \left\{1, t, t^2\right\}$ de standaard basis van $\mathcal{P}_2$. Bepaal $[Q]_{\mathcal{E}}$.

   (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van Q. Geef hierbij de eigenvectoren van Q weer als elementen van $\mathbb{P}_2$.

   (d) Is $[Q]_{\mathcal{E}}$ diagonaliseerbaar?

2. Zij H een inproductruimte.

   (a) Toon aan dat de parallellogram-gelijkheid geldt, dat wil zeggen

$$\| x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{2}$$

   voor alle $x, y \in H$.

   Definieer op $\mathbb{R}^3$, de afbeelding $\| \cdot \|_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto [0, \infty)$ als

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3|. \tag{3}$$

   (b) Toon aan dat (3) een norm op $\mathbb{R}^3$ definieerd.

   (c) Toon aan dat de norm (3) niet van een inproduct afkomstig kan zijn.
   Hint: Gebruik onderdeel (a).

3. Definieer op $\mathbb{R}^2$ de supremum norm,

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}. \tag{4}$$

   (a) Teken in $\mathbb{R}^2$ de verzameling

$$V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 2\} \tag{5}$$

   (b) Bepaal in $\mathbb{R}^2$ alle punten op de lijn $\ell := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 1\}$ met minimale afstand (in $\| \cdot \|_\infty$) tot de oorsprong.

   (c) Is $\mathbb{R}^2$ met de supremum norm een Hilbert ruimte?

4. We beschouwen de afbeelding Q van $L^2(0,\infty)$ naar $L^2(0,\infty)$ gedefinieerd als

$$(Qf)(t) = f(t+1), \qquad t \in [0,\infty). \tag{6}$$

We nemen in deze opgave aan dat de ruimte $L^2(0,\infty)$ complexwaardig is. Dus de functies in $L^2(0,\infty)$ zijn in het algemeen complexwaardig.

(a) Toon aan dat Q een lineaire afbeelding is.

(b) Toon aan dat Q een begrensde afbeelding is, en bepaal $\|Q\|$.

(c) Zij $\lambda \in \mathbb{C}$ met (strikt) negatief reëel deel. Toon aan dat $f_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ een element is van $L^2(0,\infty)$. Bereken Qf_λ.

(d) Toon aan dat 0.5 een eigenwaarde is van Q. Bepaal een bijbehorende eigenvector.

(e) Toon aan dat de kern van Q gegeven wordt door:

$$\ker Q = \{f \in L^2(0,\infty) \mid f(t) = 0 \text{ voor } t \geq 1\} \tag{7}$$

(f) Bepaal het orthogonale complement van $\ker Q$.

(g) Neem nu f_λ met $\lambda = -1$ (zie onderdeel (c)) en los het volgende minimalisatieprobleem op:

$$\min_{g \in \ker Q} \|f_{-1}(t) - g\|. \tag{8}$$

Normering:

1	a	:	5	2	a	:	5	3	a	:	4	4	a	:	6
	b	:	4		b	:	6		b	:	5		b	:	8
	c	:	6		c	:	6		c	:	6		c	:	4
	d	:	5										d	:	4
													e	:	4
													f	:	6
													g	:	6

Totaal: 90 + 10 = 100 punten