Vak	:	**Lineaire Analyse**
Vakcode	:	151124
Datum	:	Woensdag, 31 januari 2007
Tijdstip	:	9.00–12.00
Plaats	:	SC-0

14

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Zij V de lineaire ruimte opgespannen door de functies $\{e^t, te^t, t^2e^t\}$. Op deze lineaire ruimte beschouwen we de afbeelding Q als zijnde

$$(Qf)(t) = \frac{df}{dt}(t), \qquad f \in V, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) Toon aan dat $E := \{e^t, te^t, t^2e^t\}$ een basis is van V 5 19

   (b) Bereken $[Q]_E$. 4 23

   (c) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van Q. Schrijf de eigenvectoren van Q als elementen van V. 4 27

   We nemen op V het volgende inproduct

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}e^{-2t}dt, \qquad f, g \in V. \tag{2}$$

   Verder definiëren we de lineaire deelruimte W van V als het opspansel van e^t en te^t. 30

   (d) Toon aan dat (2) een inproduct op V definiëert. 3

   (e) Maak een orthonormale basis van W. 3 36

   (f) Bepaal de orthogonale projectie van t^2e^t op W. 2

   (g) Bepaal de afstand van t^2e^t tot W. 1

   (h) Toon aan dat voor $f(t) = e^t$ en $g(t) = te^t$ geldt dat $\langle Qf, g\rangle - \langle f, Qg\rangle \neq 0$. 4 40

   (i) Is Q zelfgeadjungeerd? 3

2. Zij V een (reële) lineaire ruimte met het inproduct $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Zij u en v elementen van V.

   (a) Als $u \perp v$ toon aan dat $\|u - v\| = \|u + v\|$. 4 48

   (b) Veronderstel nu het omgekeerde, dat is we veronderstellen dat $\|u - v\| = \|u + v\|$. Toon aan dat $u \perp v$. 4 59 60

3. Zij V een (eindig-dimensionale) inproduct ruimte, en zij A een zelf-geadjungeerde afbeeldingen van V naar V. Veronderstel verder dat u en v eigenvectoren zijn van A bij verschillende eigenwaarden. Toon aan dat v loodrecht staat op u. 8 70

Z.O.Z.

4. Beschouw de Hilbert ruimte $\ell_2(\mathbb{C})$ van alle complexe rijtjes $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ waarvoor geldt $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Deze ruimte heeft als inproduct

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}, \tag{3}$$

waarbij $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$.

We maken nu de deelverzameling V van $\ell_2(\mathbb{C})$ van alle complexe rijtje met maar eindig veel niet-nul elementen. Dus

$$V = \{x \in \ell_2(\mathbb{C}) \mid \text{er bestaat een } N \in \mathbb{N} \text{ zodanig dat } x_n = 0 \text{ voor } n \geq N\}. \tag{4}$$

Merk op dat de N van het rijtje x mag afhangen.

(a) Toon aan dat V een lineaire deelruimte is van $\ell_2(\mathbb{C})$. 4

(b) We maken van V een inproduct ruimte door het inproduct (3). Toon aan dat V geen Hilbert ruimte is.

5. We beschouwen wederom $\ell_2(\mathbb{C})$ met inproduct (3), en we definiëren de afbeelding A van $\ell_2(\mathbb{C})$ naar $\ell_2(\mathbb{C})$ als volgt:

$$Ax = z \qquad \text{met } z_n = x_n + x_{n+1}. \tag{5}$$

Dus het beeld (onder A) van bijvoorbeeld het rijtje $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 0, 0 \ldots)$ is $z = (\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{25}, \frac{6}{25}, \frac{1}{5}, 0, 0 \ldots)$.

(a) Toon aan dat A een lineaire afbeelding is. 4

(b) Toon aan dat A een begrensde afbeelding is. 3
Hint 1: Driehoeksongelijkheid.
Hint 2: Voor $a, b \in \mathbb{R}$ geldt $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$.

14

(c) Bepaal de de norm van A. 3

(d) Bepaal de kern van A. 0

Normering:

1	a	:	5	2	a	:	4	3	:	8	4	a	:	6	5	a	:	6
	b	:	4		b	:	4					b	:	6		b	:	6
	c	:	6													c	:	5
	d	:	5													d	:	4
	e	:	6															
	f	:	5															
	g	:	3															
	h	:	4															
	i	:	3															

Totaal: $90 + 10 = 100$ punten