Vak	:	**Lineaire Analyse**
Vakcode	:	151124
Datum	:	Donderdag, 3 april 2008
Tijdstip	:	13.30–16.30
Plaats	:	SP-4

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Beschouw op de ruimte $\mathbb{P}_2$ de lineaire afbeelding

$$(Sp)(t) = p_0 + p_2 t + p_1 t^2, \qquad p(t) = p_1 + p_2 t + p_0 t^2. \tag{1}$$

Dus het beeld (onder S) van $1 - \pi t + 5t^2$ is $-\pi + 5t + t^2$.

(a) Bepaal de matrix behorende bij deze lineaire afbeelding t.o.v. de basis $E = \{1, t, t^2\}$.

(b) Toon aan dat 1 een eigenwaarde is van S. Schrijf de bijbehorende eigenvector als een element van $\mathbb{P}_2$.

(c) Bepaal S^2 en S^3.

(d) Zijn de eigenwaarden van S en S^3 gelijk?

(e) Op $\mathbb{P}_2$ definiëren we het inproduct

$$\langle p, q \rangle = p_0\overline{q_0} + p_1\overline{q_1} + p_2\overline{q_2}. \tag{2}$$

Vereenvoudig de volgende uitdrukking

$$\langle Sp, Sq \rangle - \langle p, q \rangle$$

(f) Is S een unitaire afbeelding t.o.v. het inproduct (2)?

2. Zij $\mathbb{P}_6$ de (compleze) lineaire ruimte bestaande uit de polynomen van graad 6 of kleiner. We beschouwen de volgende deelverzameling van $\mathbb{P}_6$

$$V = \left\{ p(t) = p_0 + p_1 t + \cdots + p_6 t^6 \in \mathbb{P}_6 \mid p_k = 0 \text{ voor } k = 0, 2, 3, 4 \text{ en } 5 \right\}. \tag{3}$$

(a) Toon aan dat V een lineaire deelruimte is van $\mathbb{P}_6$.

(b) Bepaal een basis van V, en geef z'n dimensie.

We nemen op $\mathbb{P}_6$ het volgende (kandidaat)inproduct:

$$\langle p, q \rangle = 78 \int_{-1}^{1} p(t)\overline{q(t)}\,dt. \tag{4}$$

(c) Toon aan dat (4) een inproduct op $\mathbb{P}_6$ definieert.

(d) Maak een orthonormale basis[1] van V.

(e) Bepaal de beste benadering van $1 + t$ in V.

Z.O.Z.

[1]Hint: $78 = 6 \cdot 13$

3. Zij V een (eindig-dimensionale) inproductruimte, en zij U een afbeelding van V naar V met de eigenschap dat $U^* = -U$. Toon aan dat alle eigenwaarden van U op de imaginaire as liggen.

4. Beschouw de lineaire ruimte $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ van alle reële rijtjes $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ waarvoor geldt $\sum_{n=1}^{\infty} |nx_n| < \infty$. Op deze ruimte definiëren we de (kandidaat)norm

$$\|x\|_{HZ} = \sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|, \tag{5}$$

waarbij $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Dus de "norm" van $(0, 0, 1, 0, \ldots)$ is drie.

   (a) Toon aan dat de uitdrukking van (5) een norm op $\ell_{HZ}(\mathbb{R})$ definieert.

   (b) Zij V een inproduct ruimte. Toon aan dat voor de norm behorende bij het inproduct de parallellogram-gelijkheid geldt, dat wil zeggen

$$\|v - w\|^2 + \|v + w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \tag{6}$$

   voor alle $v, w \in V$.

   (c) Toon aan dat de norm (5) niet bij een inproduct hoort.

5. We beschouwen de ruimte $\ell_2(\mathbb{C})$ met inproduct $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$, $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$. Verder definiëren we de afbeelding L van $\ell_2(\mathbb{C})$ naar $\ell_2(\mathbb{C})$ als volgt:

$$Lx = z \qquad \text{met } z_n = \frac{1}{n} x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Dus het beeld (onder L) van bijvoorbeeld het rijtje $x = (1, \frac{1}{2}, 4, 0, 24, \frac{1}{5}, 0, 0, \ldots)$ is $z = (\frac{1}{2}, 2, 0, 6, \frac{1}{25}, 0, 0, \ldots)$.

   (a) Toon aan dat L een lineaire afbeelding is.

   (b) Toon aan dat L een begrensde afbeelding is.

   (c) Bepaal de norm van L.

Normering:

1	a : 5	2	a : 4	3	: 8	4	a : 6	5	a : 6
	b : 5		b : 4				b : 4		b : 6
	c : 4		c : 6				c : 4		c : 6
	d : 3		d : 6						
	e : 4		e : 6						
	f : 3								

Totaal: 90 + 10 = 100 punten