Vak	:	**Lineaire Analyse**
Vakcode	:	151124
Datum	:	Woensdag, 28 januari 2009
Tijdstip	:	9.00–12.00
Plaats	:	SC

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Een rekenmachine mag niet gebruikt worden.

1. Beschouw de lineaire ruimte V opgespannen door de basisfuncties $\cos(t)$ en $\cos^3(t)$. Op de ruimte definiëren we de volgende afbeelding:

$$Df = f^{(2)}. \tag{1}$$

Dus de tweede afgeleide van de functie f.

(a) Bepaal Df voor de basisfuncties $f(t) = \cos(t)$ en $f(t) = \cos^3(t)$. Schrijf de beelden als elementen van V.
Hint: $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

(b) Toon aan dat D een lineaire afbeelding is van V naar V. Merk op dat u ook moet aantonen dat D in V afbeeldt.

(c) Bepaal $[D]_S$, waarbij $S = \{\cos(t), \cos^3(t)\}$ een basis is van V.

(d) Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van D. Schrijf de eigenvectoren als elementen van V.

2. Zij $\mathbb{P}_2$ de reële lineaire ruimte bestaande uit de reële polynomen van graad 2 of lager. We beschouwen de volgende deelverzameling van $\mathbb{P}_2$

$$V = \{f \in \mathbb{P}_2 \mid f(1) = 0\}. \tag{2}$$

(a) Toon aan dat V een lineaire deelruimte is van $\mathbb{P}_2$.

(b) Bepaal een basis van V, en geef z'n dimensie.

We nemen op $\mathbb{P}_2$ het volgende standaard inproduct:

$$\langle p, q \rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2, \tag{3}$$

waarbij $p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2$, $q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2$.

(c) Maak voor V een orthonormale basis t.o.v. het inproduct (3).

Tenslotte definiëren we de volgende lineaire afbeelding op V.

$$(Qf)(t) = (t-1)f^{(1)}(t). \tag{4}$$

(d) Is Q een zelf-geadjungeerde afbeelding t.o.v. het inproduct (3)?

Z.O.Z.

3. Zij V een (complexe) lineaire (eindig-dimensionale) ruimte met het inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zij verder A een zelf-geadjungeerde, lineaire afbeelding van V naar V, met de eigenschap dat voor alle $v \neq 0$
$$\langle v, Av \rangle > 0.$$
Toon aan de volgende uitdrukking ook een inproduct op V is
$$\langle v, w \rangle_A := \langle Av, w \rangle, \qquad v, w \in V.$$

4. Zij V een (eindig-dimensionale) inproductruimte, en zij U een unitaire afbeelding van V naar V. Verder is gegeven dat $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ een orthonormale basis van V is. Toon aan dat $S = \{Ue_1, Ue_2, \ldots, Ue_n\}$ ook een orthonormale basis van V is.

5. Beschouw de lineaire ruimte $\ell_{HZ}(\mathbb{C})$ van alle complexe rijtjes $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ waarvoor geldt $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ en $x_{2k+1} = 0, k = 0, 1, \ldots$. Deze ruimte is een inproductruimte onder het inproduct
$$\langle x, y \rangle_{HZ} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k} \overline{y_{2k}}, \tag{5}$$
waarbij $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$.
   (a) Toon aan dat $\ell_{HZ}(\mathbb{C})$ een Hilbertruimte is.
   Hint: $\ell^2(\mathbb{C})$ met het inproduct $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ is een Hilbertruimte.
   (b) Construeer een maximaal orthonormaal stelsel van $\ell_{HZ}(\mathbb{C})$.

6. Zij $C([-1,1])$ de verzameling van alle (reële) continue functies op het interval $[-1,1]$. Voor deze ruimte definiëren we de (kandidaat) norm
$$\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(t)| dt. \tag{6}$$
   (a) Toon aan dat (6) een norm is voor $C([-1,1])$.

   We definiëren de lineaire afbeelding L van $C([-1,1])$ naar $C([-1,1])$ als volgt:
$$(Lf)(t) = t^2 f(t). \tag{7}$$
   (b) Toon aan dat L een begrensde afbeelding is.
   (c) Bepaal de norm van L.

Normering:

1	a	:	5	2	a	:	5	3	:	8	4	:	10	5	a	:	6	6	a	:	6
	b	:	6		b	:	5								b	:	6		b	:	6
	c	:	4		c	:	6												c	:	6
	d	:	5		d	:	6														

Totaal: 90 + 10 = 100 punten